UFR Sciences de l'Homme et de la Société

Département des Sciences de l'Éducation

Master 1 Sciences de l'éducation – F.O.A.D

L'acquisition du nombre chez l'enfant.

De l'intérêt du matériel concret.

Nom : Christian SERMIER.

N° étudiant : 21211133

Tutrice : France ROY

Année universitaire 2013-2013

Sommaire

Avant propos.

Enseignant depuis plus de vingt-cinq ans, j'ai eu besoin de m'extraire de mon quotidien pour trouver une nouvelle motivation et interroger ma pratique. Je souhaitais également reprendre des études pour changer d'orientation professionnelle et rejoindre le domaine de la formation pour adultes. Pour autant, je ne pensais pas que j'aurais à m'adapter à un positionnement de chercheur (ou d'apprenti chercheur) qui me donnerait du fil à retordre, c'est sûr, mais m'apporterait surtout autant de plaisir.

Instituteur spécialisé depuis plusieurs années, je suis régulièrement confronté aux difficultés mathématiques de certains élèves qui me semblent peu accompagnés dans leur souffrance et davantage bousculés que compris. Les différences de prises en charge en matière de rééducation m'interpellent depuis longtemps et le recours au matériel concret que j'utilise pour les aider à reconstruire le nombre aussi.

Pourquoi attendre qu'ils soient en grande difficulté pour leur proposer ce genre d'outils ? Pourquoi vouloir développer si vite des automatismes et attacher tant d'importance aux réponses plutôt qu'au raisonnement ou au sens ? Pourquoi une telle empathie pour les difficultés liées à l'entrée dans l'écrit et un tel mépris pour celles liées au nombre ?

Autant de questions auxquelles j'espérais naïvement répondre grâce à ce travail qui m'a permis de mieux comprendre toute la complexité du sujet et l'aspect quasi herméneutique de son analyse.

Ce n'était plus un problème auquel je devais trouver une solution, ou tout au moins des éléments de réponses, mais une réflexion complexe et subtile qui allait m'amener à changer mon regard sur l'appropriation du nombre chez l'enfant, la didactique des mathématiques et même les sciences de l'éducation. Chaque question en amène une autre et les hypothèses se succèdent, bousculées par des interprétations sans cesse remises en cause.

La route promettait d'être longue et semée d'embûches, enrichissante aussi. Elle a tenu toutes ses promesses.

Introduction.

Communiquer n'est pas une chose facile et force est de constater que dans le domaine des apprentissages, cette situation n'échappe pas à la règle. Ainsi, les élèves ont souvent des difficultés à expliquer ce qu'ils prévoient de faire (anticipation) ou ce qu'ils viennent de faire (rétroaction) ou parfois même ce qu'ils sont en train de faire et surtout pourquoi ils le font. Les enseignants sont également souvent confrontés à des difficultés liées au langage oral, tant dans l'illusion de transmettre un savoir (« Ça fait dix fois que je vous le dis et ce n'est toujours pas compris ») que dans celui de contrôler un raisonnement (« Tu as compris ? »).

Si dans le domaine du langage oral ou écrit l'obstacle est récurrent, nous pouvons nous poser la question des difficultés repérées dans le domaine du raisonnement mathématique et plus particulièrement de l'accès au nombre.

Dans notre numération décimale positionnelle, la transcription orale des nombres en français peut en effet faire obstacle à leur compréhension. Pourtant, en maternelle, ce sont les interactions orales qui prédominent l'accès au nombre à travers les comptines et autres jeux de doigts et rituels oralisés. Les désignations chiffrées sont les traces écrites des désignations orales. Des difficultés se révèlent encore lorsque les élèves abordent la construction de la base 10 en CP, les opérations ou les nombres décimaux[1] ou bien les décimaux et les fractions.[2]

La question de la place des désignations orales dans l'apprentissage de notre numération est une question centrale tant du point de vue de l'apprentissage que de l'enseignement. Mais les difficultés liées à l'acquisition du nombre chez l'enfant ne se limitent pas au langage. Nous aborderons également la question de l'évolution culturelle du nombre et de son enseignement ainsi que d'autres obstacles récurrents comme le rôle des représentations figurées, l'accès au symbolisme, la mémoire, la distinction entre comptage et calcul, la notion d'inhibition et l'anxiété.

Enfin, nous essaierons de voir si l'utilisation de matériel concret facilite l'accès au nombre en permettant, entre autre chose, d'établir des liens entre le dire et le faire et d'offrir des possibilités de tâtonnements et d'essais-erreurs plus importantes que par l'écrit.

1 Parouty, 2005
2 Bedonarz et Janvier, 1982

Première partie :

La cadre théorique.

1. Le cadre théorique.

1.1. Le concept de nombre

Le nombre est une notion fondamentale des mathématiques dérivant du besoin de dénombrer, de classer des objets ou de mesurer des grandeurs, mais qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte. C'est un modèle mental générique qui peut se décliner en une infinité de représentations (3, trois, ***, etc). Pour appréhender cet objet abstrait, il nous est donc nécessaire de le caractériser par des données objectives : l'ordinalité et la cardinalité.

Le Larousse fait référence à la notion de symbole caractérisant une unité ou une collection d'unités. Chez les Grecs, un nombre s'identifiait à une quantité, à la mesure d'un segment, d'une aire d'un volume et au rapport de telles mesures. En mathématiques actuelles, un nombre est « *un élément d'un ensemble particulier satisfaisant à des axiomes précis* » (Dictionnaire des mathématiques, PUF, 2005).

L'humanité a mis des millénaires pour passer de la quantité aux nombres. Plus de 20 000 ans séparent la présence d'entailles numériques de l'apparition des *calculi* au Moyen Orient puis des premiers chiffres à Sumer et en Elam (vers – 3000). L'idée de nombre est l'aboutissement d'un long travail d'abstraction de la pensée.[3]

1.2. L'acquisition du nombre

Les travaux concernant le nombre, son acquisition et son utilisation chez l'enfant et l'adulte apparaissent au début du XX^{e} siècle. Jusque vers les années 60, des psychologues cherchent à situer les individus les uns par rapport aux autres tandis que d'autres cherchent à décrire et expliquer la difficulté relative aux savoirs et savoir-faire arithmétiques et concevoir des techniques susceptibles d'en améliorer l'apprentissage et l'utilisation. Alfred Binet et Théodore Simon[4] élaborent de 1905 à 1911 des tests d'intelligence classés en fonction de l'âge de réussite contenant des épreuves de type numérique. Alice Descoeudres[5] montre que le nombre s'acquiert progressivement entre 3 et 6 ans et soulève le problème des rapports entre le développement de l'enfant et la construction des programmes d'enseignement. Entre

3 http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/histoire-des-nombres/154-histoire-des-nombres
4 A. Binet, *L'étude expérimentale de l'intelligence* , Paris, 1903.
5 A. Descoeudres, *Le Développement de l'enfant de 2 à 7 ans,* Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1921.

1960 et 1980, les conceptions de Jean Piaget sur le développement de l'enfant et leur application au champ pédagogique, en relation avec les mathématiques dites modernes permettent le passage de l'empirisme au constructivisme. Pour Piaget, « *le nombre est un invariant abstrait, indépendant des configurations sous lesquelles il se manifeste*», « *la logique, et non l'empirie, fonde la notion de nombre* ».[6] La conception de Piaget a été très influente. D'une part, elle a contribué à amener la recherche fondamentale à explorer les fondements logiques de la pensée mathématique, en particulier la classification et la sériation, dont le nombre serait la synthèse. D'autre part, elle a fait évoluer les orientations pédagogiques de l'enseignement des mathématiques. Plus récemment, à partir de 1980, sous l'influence de la neuropsychologie puis des sciences cognitives, un double mouvement, théorique et empirique, a mis en évidence la diversité et la complexité des activités mentales associées aux mathématiques, recherché les fonctionnements cérébraux qui leur sont associés, cherché à les mettre en relation avec les données de la génétique et du développement tout en se préoccupant des applications aux pathologies et à la pédagogie.[7] Pourtant, l'acquisition du nombre est loin de nous avoir encore livré tous ses secrets.

1.3. Le nombre : produit culturel

Les enfants entendent des mots-nombres dans des contextes variés. Les pages des livres, les numéros de téléphone, les étages de l'immeuble, les plaques d'immatriculation, les adresses postales, les dates, durées, masses, monnaie, distances... sont autant d'exemples de nombres que l'on peut relever au quotidien. Très tôt, les enfants y sont confrontés, tel un « espace de numération » dans lequel ils vont apprendre à s'orienter...

Pour les nouveaux théoriciens de l'apprentissage que nous venons d'évoquer à la fin du paragraphe précédent, Piaget aurait sous-estimé les compétences numériques des jeunes enfants en ne tenant pas compte de son aspect culturel. Il est vrai que les enfants entendent des mots-nombres dans des contextes variés qui véhiculent des propriétés différentes du nombre : le cardinal, l'ordinal, la mesure, etc. et dans des contextes non numériques : les chansons et les jeux. Partant de là, ils accordent un

6 J. Piaget, A. Szeminska, L*a Genèse du nombre chez l'enfant,* Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1941.
7 S. Dehaene, M Piazza, P. Pinel, L. Cohen (2005) ; J. Bideaud, H. Lehalle, B. Vilette (2004)

rôle important au dénombrement considéré comme un instrument culturel utilisé par l'enfant pour construire le concept de nombre. Il faut donc, selon ce courant, élargir le modèle piagetien classique pour intégrer la connaissance du dénombrement précoce dans la construction du nombre. Si le nombre est un produit culturel alors son mode d'acquisition, voire sa nature, pourrait fluctuer selon les cultures. Les travaux de Dasen et Saxe[8] apportent de nombreux témoignages relatifs à cette question mais dépassent largement le cadre de cette étude.

Toutefois, force est de constater que beaucoup de ces mots-nombres ne sont pas liés à une notion de quantité et peuvent, de ce fait, créer des prérequis trompeurs pour les enfants. Ainsi, le 3 sur lequel je presse en utilisant une télécommande ne fait pas apparaître trois images, trois radios ou trois quantités quelconques. Les numéros de téléphone ne font référence à aucune relation d'ordre ou classification d'aucune sorte. Et les exemples sont nombreux.

1.4. Le nombre : produit du langage

L'évocation des numérosités, cardinales ou ordinales, ne va pas de soi. Elle constitue sans doute le problème majeur auquel se trouvent confrontés les enfants au début de l'apprentissage. On a besoin de mots pour parler des nombres. Or, les nombres étant potentiellement infinis, le lexique y faisant référence ne peut l'être. On a donc recours à une syntaxe (une combinatoire) gouvernée par des règles pour permettre de produire et comprendre un nombre infini de quantités. Cette organisation linguistique peut varier d'une langue à l'autre -nous y reviendrons- et s'avérer plus ou moins complexe à maîtriser.

« *L'impact du langage sur l'origine et le développement du nombre semble davantage trouver des pistes d'avenir dans les travaux de neurosciences que dans ceux des interactionnistes.* »[9] Ces derniers ont montré que les enfants de milieux défavorisés pouvaient être piégés par les consignes piagétiennes.[10]

Le système de numération de position chiffrée en base dix et le système de numération écrite avec des mots – appelé par certains « numération orale »- fonctionnent différemment. Les règles d'écriture et de lecture ne sont pas les mêmes.

8 http://www.abebooks.fr/rechercher-livre/auteur/dasen-pierre/sortby/3/
9 CHALON-BLANC A (2005), *Inventer, compter et classer : de Piaget aux débats actuels*, Paris, Armand Colin.
10 Hudson, 1985 ; Perret-Clermont et al., 1988

L'enfant de CP doit apprendre en même temps les deux systèmes et acquérir des automatismes. Il doit penser « 80 » et donc voir les chiffres « 8 » et « 0 » en entendant quatre-vingt (qui devrait correspondre plus logiquement à 420). Ainsi, les mots ne désignent pas les mêmes objets, certains désignant des coefficients multiplicatifs de la puissance de la base, d'autres désignant les puissances de la base correspondante et d'autres encore désignant une concaténation des deux.
L'importance de la dénomination du nombre en lien avec sa compréhension a fait l'objet de nombreuses études. Le verbalisme des figurations et le verbalisme des signes numériques est complexe et ne fait pas l'unanimité. Prenons pour exemple les mots « dizaines » et « centaines ». Un accord se fait aujourd'hui entre chercheurs pour considérer que ces mots sont mal compris des élèves, ne serait-ce que parce que dans le langage quotidien, l'usage du suffixe « -aine » avec des mots-nombres crée une signification d'approximation : quelqu'un qui « a la trentaine », par exemple, a environ trente ans. Ainsi, le terme « groupe de 10 » serait préférable à toute autre dénomination.[11]

1.5. L'accès au symbolique.

Les systèmes et pratiques numériques varient selon les cultures.[12] Ils correspondent à des instruments et des outils cognitifs permettant le dénombrement et le calcul. Ils ont été élaborés par ces cultures au cours de leur histoire en fonction de leurs conditions de vie particulières et de leurs besoins. Ils comportent deux dimensions : un code (presque toujours verbal) et des pratiques.
Les pratiques varient selon les cultures et parfois, les systèmes éducatifs. Ces pratiques ont pour objectif des trouver des moyens pour « s'aider à compter ». Elles peuvent s'appuyer sur les doigts, l'ensemble du corps, ou utiliser des objets tels que les bouliers, les règles de calcul, les calculettes, les jetons, les abaques... En occident, l'utilisation des doigts est sans aucun doute la pratique la plus répandue.
Les codes partagent un certain nombre de propriétés, souvent perceptives, avec ce qu'ils représentent. Il peut s'agir d'encoches sur un morceau de bois qui correspondent à une quantité réelle de biens. Ce système, beaucoup utilisé dans le commerce autrefois, permettait de s'accorder sur la relation établie entre une marque

11 Brissiaud R. (2003) « *Comment les enfants apprennent à calculer* », Retz, p. 48 à 50.
12 IFRAH G, (1985), *Les chiffres ou l'Histoire d'une grande invention,* Paris, Robert Laffont.

(le signifiant) et ce qu'elle représente (le signifié). Aujourd'hui encore, certaines cultures utilisent les parties du corps pour compter. Ainsi, dans le système Oksapmin de Nouvelle-Guinée, toute entité à dénombrer correspond à un élément du corps suivant un ordre précis. Pour qui connaît l'ordre, la quantité et ses variations peuvent facilement être mises en correspondance avec les positions sur le corps.

Dans notre numération actuelle, nous utilisons le code indo-arabe qui comprend dix signifiants (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) et un principe, la notation positionnelle. Les notations écrites sont généralement découvertes plus tard que les formes orales, du moins dans le cadre de l'apprentissage scolaire. En effet, comme nous l'avons vu, l'impact cultuel et la généralisation des affichages numériques (appareils électroniques, ménagers, montres, téléphones...) rendent probablement plus précoce l'acquisition au moins partielle des formes-chiffres. C'est davantage la notation positionnelle qui pose problème et particulièrement le passage à la dizaine. La notation positionnelle présuppose que :

✔ la valeur d'un chiffre est déterminée par la place qu'il occupe dans le nombre ;

✔ un vaut 1 dans la colonne la plus à droite mais 10 dans la suivante, plus à gauche, puis 100 dans la suivante et ainsi de suite ;

✔ la valeur de position augmente de droite à gauche par puissances de 10 ;

✔ la valeur d'un chiffre s'obtient en multipliant la valeur de ce chiffre par la puissance de la base correspondant à la position qu'il occupe ;

✔ la valeur d'un nombre égale la somme des valeurs représentées par chaque chiffre.

Deuxième partie :

Le cadre officiel.

2. Le cadre officiel

2.1. L'enquête PISA

Le PISA (ou Programme International pour le Suivi des Acquis des étudiants) est une étude qui vise à mesurer les performances des systèmes éducatifs dans les 34 pays membres de l'OCDE et des pays partenaires (65 pays participants au total). L'enquête, menée tous les trois ans, prend la forme de tests de deux heures soumis à un demi-million d'élèves de 15 ans. Les évaluations portent sur la lecture, la culture mathématique et la culture scientifique.

En 2009, en mathématiques, la France se révèle dans la moyenne des pays de l'OCDE avec 497 points. Mais les scores des élèves ont chuté de 14 points entre 2003 (511 points) et 2009. La France rétrograde donc du groupe des plus performants au groupe des moyens, comme la Suède. Et là encore, l'écart entre les élèves s'est accentué. Les 10 meilleurs pays en maths sont Shanghai-Chine (600 points), Singapour, Hong Kong, la Corée, le Taipei, la Finlande, le Liechtenstein, la Suisse, le Japon et le Canada. La France (22e rang) se situe au même niveau que la Norvège, la Suède, la République tchèque, le Royaume-Uni ou la Hongrie. [13]

En 2011, Luc Chatel, alors Ministre de l'Education Nationale, faisait état de deux faiblesses principales dans notre pays : la « bipolarisation » des résultats (le grand écart entre les élèves en difficulté -20% en 2009- et les excellents élèves) et la forte influence du statut économique et social des parents sur les performances des jeunes. La détermination des raisons de cette situation n'est pas facile : il est complexe de faire part de ce qui revient à la culture, à l'environnement familial et à l'enseignement.

2.2. Les instructions officielles et leur évolution

<u>Au cycle 1</u>

Les instructions officielles de 2008 placent l'approche des quantités et des nombres à l'école maternelle dans le champ de la découverte du monde. Au même titre que l'enfant apprend à raisonner, à se repérer dans l'espace et le temps, « *il devient capable de compter, de classer, d'ordonner et de décrire, grâce au langage et à des*

13 http://www.e-orientations.com/pratique/classements/lecons-pisa

formes variées de représentation (dessins, schémas) »[14]. Un accent particulier est mis sur les questionnements et les commentaires de l'enseignant qui va aider l'enfant à prendre conscience des mots-nombres. Les nombres sont utilisés dans des situations variées qui leur donnent un sens. La suite des nombres (au moins jusqu'à 30) est introduite dans des situations concrètes (calendriers, jeux...) de sorte que « *les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée* ».

<u>Au cycle 2</u>

« *L'apprentissage développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement. La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. […] Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.* [15]» La résolution de problèmes, le calcul mental régulier et l'acquisition de mécanismes sont également clairement stipulés.

<u>Au cycle 3</u>

« *La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision. […] L'étude des nombres est poursuivie jusqu'au milliard, mais des nombres plus grands peuvent être rencontrés.* »[16] On aborde l'étude des nombres décimaux et des fractions. On renforce ses compétences en calcul mental, dans la résolution de problème et on acquiert de nouveaux outils et de nouveaux automatismes.

Dans ces instructions officielles, le nombre fait rapidement appel au langage oral en Cycle 1. L'enfant doit établir une *première correspondance entre désignation orale et écriture chiffrée*, il devient capable de compter […] *grâce au langage.* La découverte du nombre se fait beaucoup à travers des activités ritualisées, des questionnements et commentaires de l'enseignant, des comptines et autres jeux souvent oralisés. La place du matériel concret et surtout les interactions nécessaires pour créer du sens sont-elles suffisantes ?

14 http://www.inattendu.org/grape/IMG/pdf/programmesC1_2008.pdf
15 http://www.inattendu.org/grape/IMG/pdf/programmesC2_2008.pdf
16 http://www.inattendu.org/grape/IMG/pdf/programmesC3_2008.pdf

Rémi Brissiaud avance que la baisse des performances en calcul pourrait être due au basculement vers des pratiques pédagogiques et des programmes en maternelle qui appartiennent à une autre culture, celle des Etats Unis. Pour lui, l'école maternelle devrait renouer avec les apprentissages numériques qui étaient les siens de 1923 à 1986 environ. D'après lui, la réforme de 70 (dite des « mathématiques modernes » n'aurait pas créé la rupture que certains croient. En revanche, la circulaire de 1986 (orientations pour l'école maternelle) signée par J.P. Chevènement[17] devrait être reconsidérée aujourd'hui. En effet, en 1987, près de 20 ans après la réforme de 70, les élèves calculaient encore bien, ce qui n'était plus du tout le cas en 2007. Notons que cette baisse affecte tous les milieux socioculturels dans les mêmes proportions, que les moyens dédiés à l'école ont augmenté de 87 à 99 et que le français n'est pas autant touché (ce qui aurait pu trouver une explication dans le temps passé devant la télé ou la console de jeux, par exemple). Il nous invite donc à observer l'évolution des textes officiels et des pratiques qui ont provoqué un basculement de la pédagogie du nombre à l'école maternelle. Cette circulaire de 86 préconise en effet l'apprentissage et la récitation de la comptine numérique et en ce sens, préconise l'enseignement du comptage qui, pour Brissiaud, éloigne les élèves du calcul. Bien sûr, ce n'est pas le seul changement pédagogique qu'il convient d'étudier pour comprendre l'effondrement des performances en calcul mais c'en est un important qu'il faut prendre en compte. Les pratiques pédagogiques en maternelle ont également évolué. Entre 70 et 90 par exemple, le signe de la soustraction n'était introduit que vers le milieu du CE1. Les enfants utilisaient davantage de blocs logiques ou de matériel concret pour effectuer des activités « pré-numériques », recommandées suite aux travaux de Piaget.

2.3. La place du matériel concret dans l'acquisition du nombre et son évolution.

Comme nous venons de l'évoquer dans le chapitre précédent, les pratiques pédagogiques et surtout la place du matériel concret ont nettement évolué dans les classes ces trente dernières années.

17 http://www.formapex.com/telechargementpublic/textesofficiels/1986_1.pdf

Nous commencerons par présenter deux grandes catégories de matériels qui restent, aujourd'hui encore, associés au nom de leur créateur avant d'élargir à des matériels plus courants.
Maria Montessori qui s'inscrit dans la continuité des travaux d'Itard et Seguin est connue pour ses travaux dans le domaine de la pédagogie expérimentale au début du siècle dernier qui ont donné naissance à des écoles, une pédagogie et un matériel spécifique qui portent encore son nom. Appuyant ses recherches sur l'étude d'enfants mentalement handicapés, elle a développé une théorie de l'éducation en lien avec le développement naturel de l'enfant susceptible d'être stimulé par un matériel pédagogique étalonné. Il existe quatre grandes catégories de matériel Montessori : le matériel de vie pratique, le matériel sensoriel, le matériel de langage et le matériel de mathématique. Ce dernier permet à l'enfant d'organiser, classifier, sérier son vécu. Il est sensoriel, suit une progression très stricte et fonctionne essentiellement par paires et gradations.
Georges Cuisenaire est associé à ses fameuses réglettes colorées qu'il a inventé dans les années 50. Ces « nombres en couleurs » avaient pour but de favoriser la construction du nombre en permettant une relation directe entre le cardinal et l'ordinal, en offrant la possibilité d'effectuer de multiples comparaisons et des calculs auto-correctifs. Elles ont été largement utilisées pendant plus de vingt ans.
D'autres matériels importants peuvent être ajoutés à cette liste : les plaquettes de madame Herbinière Lebert, Le matériel « base 10 » (cubes de 1, barres de 10, plaques de 100...), les réglettes avec caches, les bûchettes, les allumettes, les tables de Seguin, les rouleaux, plateaux de numération et autres vues d'ensemble, le matériel d'Hélène Lubienska de Lenval ou de Pierre Faure, les jeux de lotos ou les boîtes de classements de Decroly pour ne citer que les plus connus.
Ces matériels avaient pour objectifs communs de favoriser la pensée mathématique de l'enfant par l'expérimentation mais aussi la prise en compte de l'apprentissage par le jeu, l'amour pour la répétition et l'ordre (selon Montessori), la récompense positive et l'estime de soi (selon les principes d'auto-correction de Cuisenaire), le besoin d'action physique et pas seulement intellectuel.
Nous citerons enfin, pour rester dans le domaine de ces pédagogies constructivistes, Alfred Binet qui disait que « l'enfant ne sait que ce qu'il a agi », Pierre Bovet qui

lançait le terme « d'école active » alors qu'Ovide Decroly demandait « une école pour la vie, par la vie » et que Piaget œuvrait pour l'idée que « le nombre fait l'objet d'une construction ».
Beaucoup de ces matériels disparaîtront ou ne seront plus utilisés de la même manière après la réforme des mathématiques modernes de 1970. Progressivement délaissés au profit du dessin ou d'une approche plus théorique des mathématiques, ils seront, dans le meilleur des cas, réservés aux activités pré-numériques effectuées en maternelle puis remisés dans les placards.

Troisième partie :

Les principaux obstacles à l'acquisition du nombre.

3. Les principaux obstacles à l'acquisition du nombre.

3.1. Le code oral

Une fois l'apprentissage du code arabe et son fonctionnement réalisés, on pourrait penser que le traitement auquel il donne lieu est le même d'une culture à l'autre. Or, les données issues des études en imagerie cérébrale montrent qu'il n'en est rien[18]. Il semble que les anglophones privilégient un traitement langagier dans la compréhension du nombre alors que les sinophones lui préfèrent un traitement visuo-spatial. Les enfants issus des cultures asiatiques réussissent plus rapidement l'apprentissage du système arabe que les enfants des cultures occidentales. Il semble que ce soit essentiellement dû au fait que leurs systèmes oraux ont une base dix plus facilement perceptible. En effet, en français, la base 10 n'apparaît pas avec la première dizaine. Contrairement à l'organisation linguistique du système de dénomination verbale des quantités en Chinois, on dit « onze » et non « dix un ». En conséquence, les jeunes Français (et plus généralement les jeunes Occidentaux) doivent apprendre par cœur la suite des dénominations, au moins jusqu'à 16 sans pouvoir leur faire correspondre une relation additive logique. Au delà, le système verbal devient plus régulier : dix-sept, vingt-cinq... mais les noms tels que vingt ou trente ne permettent pas un repérage facile du nombre de dizaines. En Chinois, vingt se dit « deux dix », vingt et un se dit « deux dix un », etc.

De nouvelles difficultés surviennent à partir de soixante du fait de formation irrégulière des suites soixante-dix (au lieu de septante en wallon ou en suisse romande) puis de quatre-vingts et quatre-vingt-dix (au lieu de nonante). Notons également que la syntaxe française fait apparaître des relations additives ou multiplicatives qui rendent plus complexe encore la compréhension du nombre : vingt-quatre c'est vingt plus quatre alors que quatre-vingt c'est quatre fois vingt.

Ainsi, des occurrences du type « trente-neuf, trente-dix, trente-onze » relativement courantes en français n'apparaissent jamais dans les productions d'enfants asiatiques.

18 TANG Y, ZHANG Q, CHEN K, FENG S, SHEN J, REIMAN E.M., LUI Y, (2006), *Arithmetic Processing in the Brain Shaped by Cultures*, PNAS, 103 (28), 10775-10780.

Ces difficultés se retrouvent dans les additions ou les soustractions orales : dix plus six ne font pas « dix-six » et nous ne pouvons pas dire (contrairement aux Chinois) que « dix-quatre » moins quatre font dix.

Un autre difficulté peut également ralentir l'acquisition du nombre en langue française. L'article indéfini « un » par exemple est identique à l'adjectif numéral. En anglais par exemple, la distinction s'entend entre « a ball » et « one ball »... sans parler du pluriel repérable dans la terminaison auditive du nom (deux balles mais two balls).

La pédagogue Stella Baruk[19] plaide pour « un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et le sens » (c'est d'ailleurs le sous-titre de son livre). Selon elle, une des sources principales du progrès chez l'enfant est l'interprétation de la « langue des nombres » à partir de son écoute. Elle conseille une progression originale, voire surprenante, en CP. Après avoir enseigné les 10 premiers nombres, il conviendrait d'aborder directement les nombres de 30 à 59 parce qu'en oralisant trente on entre le début de trois, quarante le début de quatre et cinquante le début de cinq. Ensuite, il faudrait revenir aux nombres entre 20 et 29 car vingt n'a aucun phonème commun avec deux. Enfin, plus tard, il conviendrait d'aborder les nombres en 11 et 16 au lexique particulièrement opaque. De nombreuses études sont venues remettre en question ce cadre théorique qui assimile les nombres à leur seul système linguistique mais cela montre bien que le rôle du langage dans l'acquisition du nombre est une question clé qui n'a pas fini d'interpeller.

3.2. Le comptage et le calcul.

Le comptage doit se distinguer du calcul car il ne permet pas de développer les mêmes compétences. Pour Rémi Brissiaud[20], la pédagogie de sens commun du comptage repose sur la correspondance entre un mot et un objet. L'utilisation de la file numérique en est un bon exemple mais peut être aussi explicité par la correspondance entre les mots-nombres et les jetons d'une collection donnée. Si un enfant a 5 jetons devant lui, il peut les compter en pointant successivement chacun des jetons en les nommant « un, deux, trois, quatre, cinq ». Dans la tête de l'enfant, les mots-nombres fonctionnent comme des numéros et désigne un élément et un

19 S. BARUK « Comptes pour petits et grands » 1997.
20 http://www.editions-retz.com/auteur-1110.html

seul plutôt qu'une pluralité. Ainsi, si au terme du comptage, l'adulte demande combien il y a de jetons en tout, l'enfant peut être incapable de dire 5 dans la mesure où le dernier numéro repéré ne fait pas, pour lui, référence au cardinal de l'ensemble de la collection présentée. Plusieurs études ont fait la preuve que cet enseignement était à l'origine de nombreuses difficultés dans la conceptualisation du nombre. Il est facile de comprendre ce phénomène en imaginant un contexte où l'enfant pointe des objets en disant des mots différents : « stylo », « cube », « gomme », « trousse », « règle ». Le dernier mot prononcé « règle » réfère à l'objet qui est pointé au moment où le mot est prononcé mais ne dit rien des autres objets. Dans le comptage, le dernier mot « cinq » désigne une propriété de l'ensemble des objets.

Il faut donc éviter de parler des mots-nombres en tant que numéros et privilégier la notion de pluralité pour aller vers un comptage dénombrement explicite. Deux devient alors « un et encore un » en insistant sur l'ensemble de la collection présentée et sans nommer chacun des éléments de celle-ci. Le GEPALM propose même une dénomination orale de l'unité sans référence à un mot-nombre, avec « toc, toc, toc » par exemple pour pointer trois unités et définir le cardinal 3.

Le calcul, quant à lui, consiste à utiliser une stratégie de décomposition-recomposition en utilisant des représentations mentales ou des résultats déjà mémorisés. Ainsi, 4 + 3 pourra être pensé comme 4 + 1 + 2 si le repère 5 est acquis, ses décompositions repérées et le complément 5 + 2 connu.

3.3. Les représentations figurées

De nombreux enfants ont du mal à se forger une représentation mentale des quantités cardinales. Plusieurs chercheurs, comme Rémi Brissiaud [21], insistent sur la nécessité de prendre le temps de favoriser l'intériorisation de collections témoins inférieures ou égales à 10 pour faciliter l'accès au calcul (schématisation des doigts, constellations du dé, représentation de points rangés deux par deux, etc). Un travail systématique de correspondance terme à terme pourrait être proposé aux enfants avec du matériel concret sans faire appel à du travail par fiches accompagné d'explications orales. A défaut de représentations mentales suffisantes, l'élève a tendance à adopter une stratégie peu efficace dans les activités de calcul. Ainsi, pour

21 http://www.logicieleducatif.fr/fiches/recherches-pedagogiques/brissiaud2.pdf

trouver la somme de deux nombres par exemple, il va « recompter le tout » de un en un ou avoir recours au sur-comptage. Il ne cherchera pas à associer mentalement des quantités cardinales connues et représentées (comme les doubles, les compléments à 10, les repères 3-5-10...) pour obtenir un résultat par le calcul.

Prenons l'exemple d'un élève qui veut ajouter 5 à 8. Il dispose pour ce faire de plusieurs stratégies. La plus efficace étant sans doute de connaître de façon automatique le résultat de l'addition de ces deux nombres pour affirmer 13 sans aucune activité de calcul. A défaut, il peut partir de 8 et ajouter 5 mentalement, soit 9-10-11-12-13. En surcomptant, il effectue un comptage, ou plutôt un sur-comptage de un en un qui n'est pas forcément assimilé à du calcul. Pour calculer véritablement, c'est à dire procéder mentalement à l'assemblage des deux éléments cardinaux, le plus efficace consiste à se représenter chacun des nombres pour en avoir une image suffisante pour rassembler des parties utiles. Ainsi, s'il voit 5 à l'intérieur de 8, il peut associer mentalement 5 + 5 et visualiser 13 avec les 3 restant. Il peut aussi raisonner par rapport au fait qu'il manque 2 à 8 pour faire 10. S'il décompose mentalement 5 en 2 + 3, le calcul s'effectuera mentalement sans difficulté.

Le plus souvent, avant quatre ans, les enfants ont déjà eu l'occasion de jouer aux dominos ou à des jeux de dés. Dans ces jeux, les quantités sont représentées par des configurations de points qui facilitent leur reconnaissance : les quatre points sont en carré, le cinquième au centre de ce carré, etc. Rapidement, les enfants savent nommer ces constellations à la seule vue de leur organisation. Cela ne préjuge pas du fait qu'ils font un lien direct entre la constellation, le mot-nombre et la quantité mais cela montre qu'une activité visuo-spatiale se met en place et qu'elle favorise ce lien avec l'appropriation du nombre. Ce ne sont pas non plus les seules représentations figurées des nombres, les doigts en étant le plus souvent le premier objet. On pourrait penser que la capacité à représenter les quantités par une collection de points ou de doigts nécessite d'abord le comptage. Des résultats expérimentaux déjà anciens[22] montrent que c'est au contraire la représentation sous la forme d'une collection-témoin qui est la plus précoce. En accompagnant les élèves vers une compréhension plus fine des quantités cardinales liées à ces constellations et en favorisant la mémorisation de celles-ci on pourrait, selon de nombreux

22 Descoeudres, 1921

chercheurs, faciliter l'accès au calcul pensé. En effet, si un enfant à qui on présente 4 + 2 a une représentation mentale de 4 en points ou en doigts et qu'il peut manipuler le 2 pour retrouver une collection-témoin organisée de 5 (une main ou le dé) il calculera d'autant plus facilement le résultat sans passer par le sur-comptage.
Toutefois, des questions subsistent : quelles collections-témoins organisées doit-on utiliser en classe ? Les doigts ? Les points ? Sous forme de dé ou en regroupement 2 en 2 ?
Souvent, plusieurs représentations sont proposées simultanément afin que les élèves puissent s'approprier celle(s) qui leur convient le mieux.

3.4. La capacité d'inhibition

Pour Olivier Houdé[23] « *se développer, c'est apprendre à inhiber* ». Pour lui, « *le développement de l'intelligence ne consiste pas seulement à construire et activer des stratégies cognitives nouvelles, comme le pensait Jean Piaget […] mais aussi à apprendre à bloquer des stratégies qui entrent en compétition dans son cerveau.* »
Alors que le courant néo-piagetien a surtout insisté sur les limitations de la capacité d'activation, les travaux d'Olivier Houdé sont centrés sur les limitations de la capacité d'inhibition et sur le rôle que pourrait jouer l'évolution spécifique des limitations dans la détermination des stades. Il remarque que les tâches piagétiennes sont souvent des situations-pièges, dans lesquelles la bonne réponse implique l'inhibition du schème de réponse le plus primitif. Il fait l'hypothèse que l'échec dans ces tâches tiendrait davantage à l'insuffisance des capacités d'inhibition qui ne permettrait pas au sujet de manifester une compétence qui est déjà là plutôt qu'à une structure rationnelle qui ne serait pas encore en place.
L'enfant est un petit savant qui découvre par ses sens, ses actions et ses pensées les lois de fonctionnement du réel. La théorie piagétienne affirme que ce développement se ferait de façon linéaire et cumulative, c'est le principe des stades. Les découvertes récentes effectuées par des moyens techniques dont ne disposait pas Piaget (la vidéo, l'imagerie médicale et l'ordinateur par exemple) ont permis de découvrir que ce développement se faisait de façon beaucoup plus irrégulière que ce que l'on pensait. On sait par exemple que le bébé est capable de capacités

23 http://www.larecherche.fr/savoirs/dossier/olivier-houde-se-developper-c-est-apprendre-a-inhiber-01-07-2005-74569

cognitives assez complexes qu'il perd partiellement un peu plus tard. Il possède le sens du nombre bien avant le langage par exemple (Karen Wynn, 1990). Il en est de même chez l'adulte dont le développement de l'intelligence est jalonné d'erreurs de logique et de biais perceptifs (Mazoyer, 2010).

Olivier Houdé a repris l'épreuve de conservation du nombre et démontré avec son équipe que ce qui pose réellement problème dans cette tâche, ce n'est pas le nombre en tant que tel, mais c'est d'apprendre à inhiber la stratégie perceptive inadéquate, c'est-à-dire à inhiber l'illusion « longueur égale nombre ». Pour cela, il a étudié avec son équipe la tâche de Piaget auprès d'enfants de 8 ans. Il leur présente sur ordinateur deux situations : d'abord, comme Piaget, deux rangées de longueur inégale composées du même nombre de jetons, puis deux rangées dont la plus longue contient le plus de jetons. Il leur propose ensuite ces deux situations dans l'ordre inverse. On leur demande à chaque fois si les deux rangées comportent le même nombre de jetons et on mesure leur temps de réponse. Résultat : les enfants mettent plus de temps à résoudre la situation où la longueur varie avec le nombre si elle leur est proposée en second. Houdé fait l'hypothèse que c'est parce qu'ils ont inhibé l'illusion « longueur égale nombre » pour résoudre la première situation et qu'ils doivent la réactiver ensuite. En effet, à cet âge, les enfants ont atteint le sens du nombre selon les stades piagetiens et leur temps de réponse devrait être constant quel que soit l'ordre des situations proposées. Ils ne devraient donc plus avoir besoin d'inhiber la stratégie perceptive erronée. Cette théorie est confirmée par d'autres études faisant intervenir l'imagerie cérébrale.[24]

Pour Olivier Houdé, l'enfant doit prendre conscience des erreurs possibles à partir d'exemples et contre-exemples ou de résolution de problèmes pour s'entraîner à pratiquer l'inhibition. Il cite en exemple un matériel pédagogique proposé par Bernadette Guerrite-Hess[25] qu'il qualifie de « dispositif d'inhibition ». Celui-ci consiste en un carton avec un disque blanc au milieu, le reste étant hachuré sur un transparent amovible ; il faut mettre le « faux » dans la partie hachurée et regarder le reste.

---

24 Bernard et Nathalie MAZOYER, B.J. CASEY.

25 BACQUET M. - GUERITTE-HESS B. « Le nombre et la numération - Pratique de rééducation », Paris, Editions Isoscel, 1982.

3.5. La mémoire de travail

Disposer de façon permanente d'un stock suffisant de résultats mémorisés (les tables par exemple) représente un précieux acquis. Pour cela, les élèves ont besoin d'un entraînement régulier tant il est reconnu qu'une habileté peu mobilisée perd de son efficacité et devient progressivement plus difficile à utiliser. On se plaint volontiers d'une baisse de niveau, notamment en ce qui concerne les habiletés de calcul, de manipulation du système métrique ou de résolution de problèmes de la vie courante. Toutefois, la diminution des horaires scolaires, et de ceux consacrés aux mathématiques, les changements sociétaux, en particulier liés à l'emploi des calculettes, mais aussi à celui des modes de conditionnement (qui n'exigent plus de faire appel quotidiennement au calcul – pour connaître le prix au kilo par exemple) ne sont sans doute pas pour rien dans la baisse de performance relative à des activités relevant de l'arithmétique élémentaire. Il est établi que l'efficacité de la résolution des opérations passe à la fois par l'apprentissage et l'exercice de procédures jusqu'à leur automatisation. Il ne s'agit pas d'apprendre par cœur sans chercher à comprendre mais bien de réserver l'attention aux activités qui ne peuvent pas être automatisées (compréhension des énoncés, raisonnement, etc). Toutefois, cette mémorisation pose problème à certains enfants et nous ne disposons pas de moyens assurés pour faire face à ces difficultés.

Dans les années 50, Henri Canac se livrait déjà à une critique sévère du comptage-numérotage qui enfermait l'élève dans une absence de mémorisation des résultats d'addition.[26] Il déclarait : « *Ce n'est qu'après avoir bien réfléchi, comparé, raisonné même, qu'une notion est confiée à la mémoire. […] On passe toujours trop rapidement sur l'étude des premiers nombres, dans la hâte d'arriver aux opérations, ces brillantes opérations qui font la joie de certains maîtres et d'à peu près tous les parents.* » Il prônait l'utilisation de matériel concret en multipliant les outils et leur utilisation à des fins très variées (« parcours de tous les possibles » recommandés par le GEPALM). Cinquante ans plus tard, de nombreux chercheurs apportent une contribution nouvelle au rôle de la mémoire dans les acquisitions mathématiques et particulièrement la mémoire de travail qui se définit comme la capacité qui combine le stockage temporaire et le traitement des informations.[27] Pour ces chercheurs, la

26 F. Brachet, H. Canac, E. Delaunay, « *l'Enfant et le nombre* » Ed Didier, 1955.
27 A. Baddeley, 1990. D.J. Seyler, EP. Kirk, J Ashcraft, 2003. P. Barrouillet, R. Lépine, 2005.

cognition mathématique implique différentes dimensions : encoder, transformer en représentations internes, comparer, calculer, transcrire. Dans toutes ces activités, la mémoire de travail peut être impliquée pour maintenir, contrôler, réguler le processus cognitif. Le stockage et le traitement sont limités par, d'une part, des capacités générales, telle l'attention et, d'autre part, des caractéristiques associées aux domaines spécifiques, par exemple la maîtrise des procédures. « *La mémoire de travail intervient donc principalement dans la gestion des opérations et la résolution de problème. Elle est positivement corrélée avec les performances mathématiques des enfants* ».[28]

3.6. L'anxiété

Les mathématiques sont souvent présentés comme une matière dichotomique, où l'on a juste ou faux, et comme si la bonne réponse était primordiale. En outre, le sujet est souvent enseigné comme s'il y avait une bonne manière de résoudre le problème. D'autres approches auraient tort, seraient moins pertinentes, même si les élèves qui osent s'y aventurer ont obtenu la bonne réponse.

Lors de l'apprentissage, la compréhension des concepts devrait être primordiale, mais avec une approche vrai-faux pour l'enseignement des mathématiques, les élèves sont encouragés à ne pas essayer, ne pas expérimenter, ne pas réfléchir à leurs propres procédures, ne pas prendre le risque de se tromper.

Mark Ashcraft définit l'angoisse ou l'anxiété des mathématiques comme « *un sentiment de tension, l'appréhension ou la peur qui interfère avec la performance* »[29]

La première échelle de mesure de l'angoisse des mathématiques a été développée par Richarson et Suinn en 1972.[30] Depuis, de nombreuses recherches ont permis d'approfondir la question et découvrir que ces angoisses peuvent se manifester chez de très jeunes enfants.

Des études menées par Herbert P. Ginsburg, Columbia University, montrent que l'attitude relative aux attentes des parents et des enseignants dans ce domaine de l'apprentissage est plus importante que l'enseignement proprement dit. Les élèves

28 M. Fayol « *L'acquisition du nombre* », Que sais-je ?, PUF, p. 95, 2012.

29 Ashcraft, Mark H.; Kirk, Elizabeth P., «*Les relations entre la mémoire de travail, l'angoisse des mathématiques et performance*», Journal of Experimental Psychology General - 2001.

30 Richardson, FC, Suinn RM, «*Les mathématiques échelle d'anxiété*», Journal of Counseling Psychology, Vol. 19, 1972.

apprennent mieux s'ils sont actifs et bénéficient de leçons variées qui tiennent compte de tous les types perceptifs d'apprentissage : visuel, auditif, kinesthésique.[31] Bien sûr, mais nous ne pourrons pas l'étudier ici, la motivation sera également un élément clé de l'apprentissage et de « l'autorisation de penser et d'agir » qui permettra à l'enfant de se confronter aux mathématiques avec le moins d'anxiété possible.

Cependant, il y a toujours une grande partie de l'enseignement des mathématiques à l'école qui se compose de mémorisation, de répétition et d'opérations effectuées mécaniquement. Si l'apprentissage par cœur est essentiel pour le rendement il peut rapidement devenir source d'angoisse pour un élève qui ne parvient pas à apprendre ses tables d'addition ou de multiplication ou retenir le nom des polygones particuliers par exemple. Pour éviter cet écueil, les enfants devraient être engagés le plus souvent possible dans l'exploration, conjecturer, penser et s'autoriser à se tromper ou à utiliser une procédure originale. Concevoir des expériences positives et variées, s'abstenir de lier l'estime de soi à la réussite en mathématiques et proposer au besoin des techniques de relaxation pourraient aider beaucoup d'enfants à réduire cette anxiété.[32] Par ailleurs, en l'absence de repères psychologiques stables, personnels, familiaux, sociaux, il est probable qu'un enfant aura beaucoup plus de mal à appréhender des concepts de classification ou de sériation, à ordonner sa pensée, à anticiper et rétroagir. De ce point de vue, l'anxiété face aux mathématiques peut être exacerbée par une mauvaise image de soi ou un développement psychologique dysharmonieux. Serge Boimare et Maryse Métra explorent de nombreuses problématiques liées à l'apprentissage qui rejoignent la question de l'anxiété : « *Comment un enfant construit son expérience si l'environnement est chaotique ?* », « *Comment la scolarisation vient interroger certains vécus traumatiques ?* »[33]. Ce court travail ne nous permettra pas d'explorer davantage ce domaine de réflexion.

---

31 Spikell, M, « E*nseignement des mathématiques matériel de manipulation : une ressource d'activités pour K-12 enseignants »,* New York, Allyn and Bacon, *1993.*
32 Arem, C. « *Vaincre l'angoisse des mathématiques »,* 3e éd. Belmont, CA, Brooks / Cole, 2010.
33 http://www.omep-france.fr/?p=256

Quatrième partie :

Le cadre de la recherche.

4. Le cadre de la recherche.

Comme nous venons de le voir, les travaux concernant le nombre, son acquisition et son utilisation chez l'enfant -et même chez l'adulte- sont récents. Ils apparaissent au début du XX e siècle. De 1950 à 1980, la conception de Piaget a été très influente. Elle a amené la recherche fondamentale à explorer les fondements logiques de la pensée mathématique et privilégier une perspective rationnelle et homogène des activités mentales. A partir des années 80, sous l'influence de la neuropsychologie puis des sciences cognitives, un double mouvement théorique et empirique a remis en question un grand nombre de théories piagétiennes. Nous savons maintenant que la théorie des stades n'est pas compatible avec les capacités précoces manifestées par les jeunes enfants, que certains résultats d'expérimentations pourraient faire l'objet d'interprétations différentes (comme la conservation du nombre en lien avec la théorie d'inhibition) et que les capacités logiques d'un individu ne peuvent rendre compte de l'ensemble des déficits et troubles constatés en mathématiques. Les neurosciences se sont surtout attachées à mieux comprendre les troubles chez l'adulte, doté d'un système cognitif mature, permettant ainsi de constituer un modèle de fonctionnement normal. Elles ont conduit à explorer par imagerie cérébrale les aires activées au cours d'activités précises et mieux comprendre le fonctionnement du cerveau. Dans le champ des recherches portant sur le développement et l'apprentissage les contributions ont été plus réduites, même si cette situation évolue rapidement. Ces travaux, ajoutés aux recherches en didactique, permettent de définir au moins six obstacles à l'acquisition du nombre. Nous avons également constaté que pour certains chercheurs, l'évolution des instructions officielles en maternelle pouvaient porter à controverse et l'utilisation de matériel concret, importante dans les années 50, avait pratiquement disparu après la réforme de 70.
C'est à partir de ce cadre théorique de réflexion que s'est engagée une remise en question de notre problématique.

4.1. La problématique et les hypothèses repérées

Nous avons vu que la question de l'acquisition du nombre représente un domaine complexe qui ne peut se résumer à un simple comptage verbal ou non verbal.

Notre objectif de départ consistait à explorer d'une part si l'utilisation de matériel concret pourrait faciliter cette acquisition et d'autre part si son utilisation en classe restait d'actualité. A la lueur des apports théoriques que nous venons d'exposer succinctement, nous disposons déjà d'un certain nombre d'explications, voire d'éléments de réponse. L'acquisition du nombre est un domaine plus vaste que ce que nous avions imaginé et les nombreuses recherches déjà effectuées sur le sujet ont éclairé notre réflexion. Ainsi, l'abandon d'une grande partie du matériel concret suite à la réforme de 70, la prise en compte des obstacles cognitifs de plus en plus précis, les progrès dans la connaissance du cerveau et des fonctions cognitives étaient autant d'éléments que nous devions prendre en compte.

Dès lors, notre étude allait devoir approfondir ou interroger un point plus précis. Une nouvelle problématique nous semblait intéressante à étudier, l'écart entre les curriculums : le formel, le réel et le caché.[34] A travers un questionnaire adressé à un échantillon suffisant d'enseignants de maternelle nous aurions pu étudier les différentes pédagogies utilisées pour favoriser l'accès au nombre et analyser l'utilisation qui était faite d'un éventuel matériel concret ou du dessin. Nous avons renoncé à cette idée qui ressemblait trop à un inventaire de pratiques sans lien avec leur pertinence et qui nous éloignait de l'enfant que nous souhaitions maintenir au cœur de notre réflexion.

Nous avons donc décidé de rester centré sur la question de l'acquisition du nombre proprement dite et le fait que le dessin ait en partie remplacé le matériel concret dans la pratique a aiguisé notre curiosité. Nous pourrions peut-être vérifier s'il existe une différence significative entre l'utilisation que l'enfant fait d'un dessin et celle qu'il fait d'un matériel concret pour s'approprier le nombre. L'un est-il plus efficace que l'autre ? Comment le déterminer ?

4.2. La position d'apprenti chercheur

Notre domaine de recherche s'inscrit dans celui des sciences de l'éducation. Certaines spécificités lui sont propres, particulièrement son aspect humain, par définition subjectif.

---

34 http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1993/1993_21.html

Une partie de nos données sera quantitative (la réussite ou non à certaines épreuves par exemple) mais une autre s'appuiera plutôt sur une démarche qualitative et l'observation du sujet (comment s'y prennent les élèves). S'intéresser seulement à l'un des deux aspects aurait, selon nous, nuit à l'intérêt de notre étude. En effet, déterminer si un élève réussit mieux une épreuve à l'aide d'un dessin ou à l'aide de matériel sans prendre en compte sa démarche, son analyse, sa réflexion reviendrait à privilégier la fin aux moyens ce que nous voulons justement éviter.

Nous devrons également prendre en compte la complexité inhérente à notre sujet d'étude. Évaluer les attitudes, les réactions et les positionnements d'enfants face à une autorité qui ne leur est pas forcément familière nécessite de prendre un certain recul. Les résultats comme les procédures peuvent être influencées par un grand nombre de facteurs humains, psychologiques, sociaux, éducatifs, etc. Nous devrons donc garder un regard critique et distancié par rapport aux données obtenues et à leurs interprétations en conservant à l'esprit que de nombreuses vérifications seraient nécessaires avant de pouvoir en tirer des conclusions. Sans oublier que même dans ce cas, elles resteraient subjectives puisqu'elles ne s'inscrivent pas dans une démarche nomothétique.

Pour être valide notre démarche devra respecter un plan. Après avoir défini notre question de départ et notre idée de recherche nous avons enrichi notre connaissance du sujet par des apports théoriques qui s'appuient sur une bibliographie et une sitographie reconnus par la communauté scientifique. Ceci nous a permis de définir une problématique et formuler des hypothèses. Nous allons maintenant procéder à l'élaboration d'un protocole de recherche. Les phases de ce travail ne sont pas linéaires et nécessitent de très nombreux va et vient entre chacune des parties exposées. C'est pour en faciliter la lecture et la compréhension que nous les présentons de façon ordonnée ce qui pourrait laisser penser qu'il s'agit d'un processus cumulatif. Ce n'est pas le cas. Pour élaborer notre protocole de recherche nous allons faire des liens entre l'hypothèse formulée et les moyens de la vérifier, la prise en compte de la théorie et l'adaptation à la pratique. Pour ce faire, nous avons décidé de réfléchir à une méthodologie dont la pertinence sera éclairée par des épreuves tests. La collecte, l'analyse et l'interprétation des données n'entre pas dans les objectifs de ce « dossier exploratoire de recherche ». Ils sont réservés à une poursuite de ce travail en Master 2. Nous veillerons également à respecter une éthique qu'il conviendra d'expliciter.

4.3. La méthodologie

Nous souhaitons vérifier s'il existe une différence significative entre l'utilisation que l'enfant fait d'un dessin et celle qu'il fait d'un matériel concret pour s'approprier le nombre.

Pour cela, nous avons décidé d'effectuer notre étude auprès de deux classes d'âges, les 4-5 ans puis les 6-7 ans.

A 4-5 ans, en MS-GS, on étudie les nombres supérieurs à 3 mais inférieurs à 10 de façon systématique. Nous échappons ainsi au biais du subitizing (la perception des nombres inférieurs ou égal à trois sans comptage) et commençons à nous intéresser à la représentation figurée du nombre. Jaulin Mannoni, comme Rémi Brissiaud, s'intéresse beaucoup à la représentation des nombres sous forme de constellations de points et propose même une progression pour développer cette compétence chez l'enfant. Nous nous servirons de cet apport théorique pour construire notre activité. Nous comparerons également le niveau de réussite des élèves entre le repérage visuel d'un nombre et son repérage auditif.

A 6-7 ans, en CP-CE1, nous appréhendons la numération décimale positionnelle. L'étude effectuée par la psycho-pédagogue américaine Constance Kamii en 1985 nous a encouragé à nous interroger sur cette question. Celle-ci montrait que la compréhension des principes de la numération était tardive. Les élèves interrogés devaient compter 16 jetons et les dessiner, puis écrire 16 en chiffres avant de montrer sur le dessin ce que signifie le 6 puis ce que signifie le 1 (des dizaines). Le bilan montrait qu'aucun élève de 1ère année d'école de haut niveau (CP-CE1) n'avait compris la numération décimale positionnelle. Le test avait été répliqué dans des classes correspondant au collège en France. Les pourcentages de réussites étaient croissants, mais pas très rapidement : 60% de réussite en 6ème et 78% en 5ème. Nous nous sommes demandé si les résultats de cette étude pouvaient être différents avec l'utilisation d'un matériel concret au lieu du dessin.

Ces activités, à savoir la reconnaissance des nombres inférieurs à 10 en MS-GS et la compréhension des principes de la numération décimale en CP-CE1, sont indépendantes dans la mesure où elles ne s'adressent pas aux enfants du même âge et ne visent pas les mêmes compétences. Nous pourrions tout à fait n'en choisir qu'une pour vérifier l'hypothèse que nous avons posée. Toutefois, ce double regard nous permettra de resserrer notre étude pour le Master 2 en effectuant des choix en fonction des différences les plus remarquables que nous aurons constatées.

Nous allons donc effectuer deux épreuves tests. La première vérifiera si les élèves de MS-GS réagissent de la même façon lorsqu'ils doivent construire une collection équivalente de jetons (avec du matériel) ou de ronds (avec un dessin) à une constellation de points présentée rapidement ou à des nombres lus. La seconde vérifiera auprès d'élèves de CP-CE1 si repérer « 24 » comme deux dizaines et quatre unités est plus facile avec des allumettes qu'avec un dessin qui ne permet pas de faire des tas de 10. Notons que nous ne proposerons pas aux élèves de compter 16 (comme dans l'étude de Kamii) mais 24 pour éviter le biais de l'unité à associer à une notion de pluriel : **une** dizaine pour dix jetons ou dix allumettes ou dix unités.
L'épreuve en MS-GS s'effectuera avec l'ensemble du groupe classe alors que l'épreuve en CP-CE1 sera individuelle.
Nous avons expliqué nos objectifs et la démarche que nous allions utiliser à l'ensemble de l'équipe éducative à l'occasion d'une concertation. Nous n'avons pas eu à solliciter d'autorisation de la part des autorités administratives ou des parents de CP-CE1 du fait de notre activité professionnelle dans l'établissement où s'effectue la recherche. Si cette recherche devait être élargie à d'autres écoles pour obtenir un échantillon plus important ces autorisations seraient bien évidemment nécessaires.

4.4. La première épreuve test en MS-GS

a) Le choix de l'épreuve.

L'expérimentation en MS-GS devrait permettre de repérer s'il y a une différence entre l'utilisation du dessin ou l'utilisation du matériel en matière de résultats mais aussi de stratégie opératoire dans la façon dont les enfants s'approprient des quantités cardinales inférieures à 10 (5 pour les MS).

D'après les recherches que nous avons évoquées dans la partie théorique de ce dossier, le rôle du langage, des représentations figurées, de la distinction entre comptage et calcul, de la mémoire, de la capacité d'inhibition et de l'anxiété sont les éléments essentiels dont il convient de tenir compte pour favoriser une bonne conceptualisation des nombres.

Nous avons d'abord envisagé de demander aux enfants de compter 5 jetons (ou 5 allumettes) pour vérifier la procédure utilisée par chacun et contrôler si la notion de cardinal était acquise. Cette activité a déjà fait l'objet de nombreuses recherches. On constate en général que les enfants les plus jeunes (MS) confondent l'ordinal et le cardinal en indiquant que « le 5 » correspond à la dernière allumette ou recompte plusieurs fois les jetons « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq » pour répondre à la question « combien y a-t-il de jetons ? ». D'après la psychologue Rochel Gelman[35], cet état de fait serait plus lié à une surcharge cognitive qu'à une réelle méconnaissance du nombre. En effet, les enfants doivent à la fois se rappeler la suite des mots-nombres, coordonner leur récitation avec le pointage des objets et se rappeler qu'il faut fournir le dernier mot-nombre comme réponse. Rémi Brissiaud se démarque de cette hypothèse en avançant d'autres explications : les enfants pourraient confondre nombre et « numéro » ou employer les mots-nombres comme ils le feraient avec n'importe quel autre mot. Ainsi, lorsqu'on dénomme des objets de façon qualitative en prononçant, comme dans le comptage, des mots tous différents : « gomme, trousse, stylo, cahier, crayon », le dernier mot prononcé, « crayon », fait référence à l'objet pointé mais en aucun cas à l'ensemble des objets. Dans le cadre du comptage, c'est un lien de référence transitoire, mais qu'il faut s'approprier. L'expérience de Karen Fuson[36] évoque déjà cette idée selon laquelle les enfants accorderaient des significations différentes aux mots-nombres selon leurs contextes d'utilisation.

Quoi qu'il en soit, pour éviter ces biais liés au rôle du langage et à la distinction comptage-numérotage nous avons cherché une activité qui propose un lien direct entre le nombre et sa représentation ou entre le nombre et sa dénomination sans référence au comptage. Il fallait également que cette activité permette de prendre en compte l'utilisation de matériel concret. L'expérience de Constance Kamii que nous

35 http://psych.rutgers.edu/faculty-profiles-a-contacts/97-rochel-gelman (1978 puis 1992)
36 http://forms.hmhco.com/mathexpressions/dr-karen-fuson.php (1983)

avons évoquée pour l'activité de CP-CE1 ainsi que des activités effectuées dans le cadre du GEPALM[37] (Groupe d'Etude sur la Psychopathologie des Activités Logico-Mathématique) nous ont encouragé à utiliser un matériel le plus simple possible : des allumettes ou des jetons. En effet, dans le domaine de la rééducation logico-mathématique les orthophonistes, ou les rééducateurs certifiés GEPALM, utilisent en priorité un matériel de base aussi simple que possible. Celui-ci évite aux enfants de devoir passer par un temps d'adaptation pour l'appréhender et peuvent facilement le retrouver chez eux. Il évite le biais de l'anxiété que pourrait entraîner l'utilisation d'un matériel trop complexe.

Les élèves de la classe de MS-GS ont l'habitude d'utiliser les « cartons éclairs » pour améliorer leurs procédures de comptage et développer une représentation figurée des quantités cardinales inférieures ou égales à 10 (5 pour les MS). Ce travail est fait par la maîtresse qui présente les « collections-témoins » sous forme de points ou en utilisant ses doigts. Les élèves apportent collectivement une réponse orale. Il lui arrive également d'utiliser cette activité pour faire ajouter deux collections. Ce matériel est donc connu des enfants et nous aurons juste à le modifier légèrement pour sortir de la configuration du dé.

Nous décidons de présenter aux enfants des constellations de points aussi variées que possible. La raison en est la suivante. Nous avons vu dans la partie théorique de ce dossier que les représentations figurées faisaient partie des domaines complexes à prendre en compte pour l'appropriation du nombre chez l'enfant et qu'elles pouvaient représenter pour certains un obstacle à cette acquisition. Pour tenter de faire « le parcours de tous les possibles », formule chère à Francine Jaulin Mannoni, fondatrice du GEPALM, nous avons présenté aux enfants quatre sortes d'organisation spatiale de constellations de points, en structures non organisées, multiplicatives, ouvertes et additives (voir Annexe 1). Cette variété de présentation permet de s'assurer que les élèves ne pourront pas s'installer dans une stratégie automatisée telle que la reconnaissance « par coeur » des constellations de dés. Nous avons vu que ces associations image / mot-nombre ne sont pas systématiquement associés à une notion cardinale. En proposant des constellations

37 http://www.gepalm.org/

variées nous obligeons les élèves à mettre en place des stratégies de comptage ou de calcul au détriment de toute association automatisée.
En proposant une épreuve basée sur la seule capacité de discrimination visuelle nous ne tenons pas compte des enfants en difficulté face aux activités visuo-spatiales. Nous décidons par conséquent d'ajouter en deuxième partie de l'activité une association entre un nombre nommé et sa représentation cardinale. Nous pourrons ainsi effectuer des comparaisons entre leurs capacités visuelles ou auditives à appréhender le nombre et vérifier si ces conceptualisations du nombre varient selon les représentations réelles ou symboliques qu'ils en font (le matériel ou le dessin).

b) Déroulement et analyse

Hypothèse : Il est plus facile pour les enfants de s'approprier le nombre avec du matériel concret que par la réalisation d'un dessin.

Activité : Associer un nombre à une quantité vue ou entendue, d'abord à l'aide de matériel concret (jetons) ensuite à l'aide d'un dessin.

Échantillon : L'étude s'est faite le jeudi 20 juin 2013 en classe de MS/GS avec 26 élèves : 15 MS et 11 GS (le matin), 13 MS et 11 GS (l'après-midi). Ce sont les mêmes élèves le matin et l'après-midi (avec deux absents en MS l'après-midi).

Activité 1 : le matin.

Le matériel : Un petit pot contenant une trentaine de jetons est mis à la disposition de deux élèves. Vingt jetons auraient suffi mais nous avons préféré en proposer plus pour que les enfants qui restent dans le figuratif et ne cherchent pas à retrouver la valeur cardinale de la collection présentée aient suffisamment de matériel pour ne pas être gênés.

La démarche : Un premier essai est effectué avec plusieurs moyens de discrimination visuelle puis auditive pour que tous les enfants comprennent bien ce qu'on attend d'eux. Nous leur montrons trois doigts pour qu'ils posent trois jetons sur la table et un élève explique ce qu'il a fait. Nous faisons de même avec 8 doigts puis une demi-feuille A4 montrant 5 traits et donnons enfin la consigne d'exemple « posez trois jetons sur la table ». Nous expliquons aux enfants qu'à la fin de chaque activité « on range » les jetons, c'est-à-dire qu'on les remet dans le petit pot. Nous attendons bien que tous les enfants aient rangé le matériel avant de passer à la proposition suivante. Une fois l'activité bien comprise par tous, nous commençons les observations.

L'enseignante de la classe et l'ATSEM nous aident à compter le nombre de réussites par niveau de classe. De notre côté, nous dirigeons l'activité et repérons les stratégies particulières utilisées par certains enfants.

Les résultats de ces observations sont relevées dans les tableaux 1 et 2 ci-dessous.

Tableau 1 : discrimination visuelle avec matériel concret				
Consigne : « Vous prenez dans la boîte le même nombre de jetons que ce je vous montre sur la feuille et vous les posez sur la table ».	réussites			
	MS /15	GS /11	MS	GS
Sans organisation 1 (constellation n° 1)	3	10	20,00%	90,90%
Sans organisation 2 (constellation n° 2)	7	11	46,60%	100,00%
Structure multiplicative 1 (constellation n° 3)	4	10	26,60%	90,90%
Structure multiplicative 2 (constellation n° 4)	9	11	60,00%	100,00%
Structure ouverte 1 (constellation n° 5)	1	1	6,60%	9,00%
Structure ouverte 2 (constellation n° 6)	3	2	20,00%	18,20%
Structure additive 1 (constellation n° 7)	9	11	60,00%	100,00%
Structure additive 2 (constellation n° 8)	3	9	20,00%	81,80%
Résultats	39	65	32,50%	73,80%

Tableau 2 : discrimination auditive avec matériel concret				
Consigne : « Vous prenez dans la boîte le nombre de jetons que je dis et vous les posez sur la table ».	réussites			
	MS /15	GS /11	MS	GS
6 jetons	6	11	40,00%	100,00%
3 jetons et encore 2 jetons	9	11	60,00%	100,00%
3 et 3 et 3 jetons	5	9	33,30%	81,80%
Résultats	20	31	44,40%	93,90%

Notons que l'échantillon est insuffisant pour obtenir des résultats significatifs et que l'utilisation des pourcentages n'est pas à considérer comme une valeur de référence. Ils sont utilisés pour simplifier la lecture et surtout la comparaison des résultats d'autant plus que deux élèves de MS seront absents l'après-midi.
Concernant l'analyse que nous allons faire il est important de rappeler ici que nous ne sommes qu'à la phase de pré-test et que notre objectif n'est pas d'aller vers l'interprétation des résultats mais de repérer la pertinence de l'épreuve et vérifier si notre hypothèse répond bien aux critères scientifiques de vérifiabilité, faisabilité et unicité.
Les tableaux 1 et 2 montrent une meilleure réussite de l'activité pour les GS que pour les MS. En un an, la performance passe de 32 à 73% de réussite pour le repérage visuel d'un nombre de points sur une feuille et de 44 à 93% de réussite pour le repérage auditif d'un nombre et sa correspondance en jetons.
Il s'avère que la structure ouverte d'une constellation de points est la plus difficile à appréhender, ce qui n'est pas étonnant compte-tenu de la difficulté à choisir un point d'origine pour effectuer un comptage avec ce type de représentation. Il est possible que les enfants qui procèdent par calcul soient moins gênés par cette présentation mais notre étude ne nous permettra pas de le vérifier. En revanche, ce qui nous intéressera sera de voir s'il existe une différence de résultats entre ces structures appréhendées avec du matériel ou par le dessin.
Le tableau 2 montre enfin que la proposition orale de trois éléments (structure additive ou multiplicative) est plus difficile à appréhender par les élèves qu'avec un ou deux éléments seulement.

<u>Activité 2 : l'après-midi.</u>

<u>Le matériel :</u> Nous retrouvons les enfants en milieu d'après-midi pour leur proposer la suite de l'activité du matin. A la place des jetons, ils disposent d'une demi-feuille A4 et d'un crayon. Ils utiliseront chaque côté de la feuille et se verront donc remettre successivement quatre feuilles.

<u>La démarche :</u> Nous expliquons aux enfants « Nous allons faire du calcul comme ce matin mais au lieu d'utiliser des jetons vous dessinerez des petits ronds ». Nous

faisons un premier essai avec 6 doigts puis avec la consigne « dessinez 5 ronds ». Les enfants ont tous rapidement compris ce qu'ils ont à faire. Nous pouvons commencer l'activité.

Les résultats des observations sont relevées dans les tableaux 3 et 4 ci-dessous.

Le fait de reprendre cette activité l'après-midi a pu perturber certains élèves, leur emploi du temps en étant modifié.

Tableau 3 : discrimination visuelle avec dessin				
Consigne : « Vous dessinez sur la feuille le même nombre de jetons que ce que je vous montre ».	réussites			
	MS /13	GS /11	MS	GS
Sans organisation (constellation n° 2)	6	8	46,20%	72,70%
Structure multiplicative (constellation n° 3)	6	7	46,20%	63,60%
Structure ouverte (constellation n° 5)	9	8	69,20%	72,70%
Structure additive (constellation n° 8)	6	11	46,20%	100,00%
Résultats	27	34	51,90%	77,30%

Tableau 4 : discrimination auditive avec dessin				
Consigne : « Vous dessinez le même nombre de jetons que ce que je dis ».	réussites			
	MS /15	GS /11	MS	GS
6 jetons	8	10	61,50%	90,90%
3 jetons et encore 2 jetons	7	10	53,80%	90,90%
3 et 3 et 3 jetons	0	4	0,00%	36,40%
Résultats	15	24	38,50%	72,70%

Contrairement au matin, les enfants réagissent lorsque nous montrons les constellations très rapidement (½ seconde environ). Si cela ne semblait pas les déranger avec les jetons, ils réclament de les voir plus longtemps « pour compter », disent-ils. Nous décidons donc de les présenter pendant 3 secondes (soit 6 fois plus longtemps que le matin).

Dans l'activité visuelle (tableau 3), plusieurs élèves de GS écrivent le nombre de jetons en chiffres plutôt que de reproduire une collection de ronds équivalente. Cela donne même parfois des résultats faux mais intéressants, comme cette élève de GS qui face à la consigne « 3 jetons et encore 2 jetons » écrit sur sa feuille « 3 . 2 ». Nous constatons que cette petite fille, qui avait réussi l'activité avec les jetons, ne la

réussit pas ici. Il est possible qu'elle ait fait la même chose avec les jetons, c'est-à-dire juxtaposé les deux nombres sans chercher à les additionner mentalement mais seul un travail individuel avec un questionnement méta-cognitif nous aurait permis de le savoir.
Dans l'activité auditive (tableau 4), si 8 élèves de MS dessinent correctement les « 6 jetons » puis 7 élèves dessinent correctement les « 3 jetons et encore 2 jetons », 5 élèves seulement sont capables de recompter les jetons dessinés sur leur feuille. Sur les 4 élèves de GS qui trouvent le résultat exact de « 3 et 3 et 3 jetons », un seul est capable d'indiquer spontanément qu'il s'agissait de 9 jetons. Ceci confirme ce qui a été évoqué précédemment concernant les juxtapositions de nombres sans recherche de calcul.

Tableau 5 : comparaison des résultats « matériel vs dessin »				
	MS		GS	
Discrimination visuelle	matériel	dessin	matériel	dessin
Sans organisation (constellation n° 2)	46,60%	46,20%	100,00 %	72,70%
Structure multiplicative (constellation n° 3)	26,60%	46,20%	90,90%	63,60%
Structure ouverte (constellation n° 5)	6,60%	69,20%	9,00%	72,70%
Structure additive (constellation n° 8)	20,00%	46,20%	81,80%	100,00 %
Résultats	24,90%	51,90%	70,40%	77,30%
Discrimination auditive				
6 jetons	40,00%	61,50%	100,00 %	90,90%
3 jetons et encore 2 jetons	60,00%	53,80%	100,00 %	90,90%
3 et 3 et 3 jetons	33,30%	0,00%	81,80%	36,40%
Résultats	44,40%	38,50%	93,90%	72,70%

L'analyse du tableau 5 permet de repérer des éléments intéressants, mais en partie contradictoires, particulièrement pour la discrimination visuelle. Si dans l'ensemble les MS réussissent mieux l'épreuve avec une présentation plus longue des constellations de points, ce n'est pas le cas pour les GS. Plus surprenant encore, la discrimination auditive suivie d'un dessin entraîne de moins bons résultats pour les

deux groupes d'élèves. Cela ne suffit par pour affirmer que l'utilisation de matériel concret pourrait faciliter l'appréhension du nombre mais nous invite à penser que les stratégies utilisées par les enfants sont différentes. En effet, avec le matériel, l'action est plus rapide, modifiable et l'activité plus motivante. Avec une feuille, les enfants adoptent rapidement une attitude d'élève individuelle qui ne supporte ni la collaboration ni la comparaison des résultats. Ce n'est pas le cas avec le matériel. Pour les enfants qui doutent de leur réponse, nous avons pu constater à plusieurs reprises qu'ils cachent ce qu'ils ont écrit sur leur feuille alors qu'ils comparent ce qu'ils ont posé sur leur table. Nous retrouvons ici la théorie de Vigotsky concernant la zone proximale de développement en constatant que les enfants qui ne se posent aucune question ou ceux qui sont sûrs d'eux n'éprouvent pas le besoin d'établir ces comparaisons et de mettre en action ce conflit socio-cognitif.
Quelles informations obtenons-nous par rapport à la validité et l'intérêt de notre épreuve ?

c) Synthèse et ajustements

- Comme nous l'avons évoqué plus haut, le fait d'avoir présenté les constellations plus longtemps aux enfants lors de l'activité 2, les scores sont meilleurs. Il serait nécessaire de revoir le protocole d'expérimentation et la durée précise d'une présentation uniforme des constellations pour pouvoir obtenir des données interprétables. Il faudrait également élargir l'échantillon d'élèves qui est ici trop réduit pour passer à une valeur au moins supérieure à 30.
- Le fait d'être seul à observer les stratégies utilisées par les enfants ne permet pas d'obtenir des données suffisamment précises. Il faudrait filmer les enfants durant l'épreuve pour observer essentiellement les hésitations, les comparaisons et les ajouts-retraits. Une observation armée serait donc préférable à l'observation libre que nous avons effectuée et permettrait de noter de façon plus précise les points que nous venons d'évoquer.
- Il serait préférable de faire passer cette activité par groupe de 3 élèves pour conserver le conflit socio-cognitif et procéder en deux temps :

✔ Un premier travail filmé en petit groupe comme présenté dans notre épreuve test avec les ajustements de temps et d'observation que nous venons de préciser.

✔ Immédiatement après, un second travail de repérage des stratégies utilisées et des difficultés rencontrées à l'aide d'un court entretien individuel.

4.5. La deuxième épreuve test en CP-CE1

a) Le choix de l'épreuve

L'expérimentation en CP-CE1 devrait permettre de repérer s'il y a une différence entre l'utilisation du dessin ou l'utilisation du matériel en matière de résultats mais aussi de stratégie opératoire dans la façon dont les enfants s'approprient la numération décimale positionnelle.

L'activité proposée aux CP-CE1 s'appuie sur l'expérimentation de Constance Kamii en remplaçant le dessin par l'utilisation d'allumettes.

Nous faisons l'hypothèse qu'avec ce matériel les élèves seront plus à même de manipuler les quantités que par le dessin et procéderont à la réalisation spontanée de groupes de 10. Cela devrait également permettre de repérer plus facilement les procédures des élèves et particulièrement les hésitations et les modifications liées à l'activité cognitive.

En effet, avec le dessin, les élèves réalisent une composition du nombre qui est difficilement modifiable. Il n'est pas possible de déplacer les ronds qui ont été dessinés et ils doivent procéder à un regroupement virtuel pour former des dizaines (entourer 10 points par exemple). Avec les allumettes, le déplacement et l'organisation des unités sont plus aisés, les modifications « sans trace ». L'idée de raturer sa feuille, ou gommer, pour procéder par tâtonnement n'est pas facile à réaliser avec le dessin. Outre le fait que l'activité est chronophage les enfants sont souvent hésitants par rapport à l'idée de fournir un travail qui serait en situation ordinaire considéré comme « sale » ou « bâclé ».

Il ne nous a pas semblé utile de reproduire à l'identique l'activité proposée par Kamii à l'occasion de cette épreuve test. Ses résultats étaient catégoriques, aucun élève de

CP-CE1 n'était capable, dans son étude effectuée en 1985, de faire correspondre le « 1 » de « 16 » à dix unités. Elle en déduisait que ces élèves n'avaient pas acquis la numération décimale positionnelle.
Pour ce qui nous concerne, nous envisageons de reprendre cette activité en modifiant deux variables : le « 16 » sera remplacé par « 24 » et le dessin par du matériel concret.

b) Déroulement et analyse.

Hypothèse : Il est plus facile pour les enfants de s'approprier le nombre et d'appréhender la numération décimale positionnelle avec du matériel concret que par la réalisation d'un dessin.

Activité : Disposer 24 allumettes sur un plateau pour voir rapidement « 24 » d'un seul coup d'œil. Écrire 24 en chiffres sur une feuille. Montrer « le 4 » puis « le 2 » dans la collection d'allumettes.

Échantillon : L'étude s'est faite les 24 et 27 juin 2013 avec 10 élèves de CP puis 12 élèves de CE1 dans deux classes différentes (6 élèves de la classe A et 6 élèves de la classe B). Notons que les élèves de la classe A ont l'habitude d'utiliser du matériel concret et de nombreuses représentations des nombres ce qui n'est pas le cas de la classe B, nous y reviendrons.

Le matériel : Un petit pot contenant une quarantaine d'allumettes et un petit plateau (voir annexe 2).

La démarche : Les élèves sont accueillis individuellement dans un « petit salon » installé au fond du couloir de la classe de CP. Ils disposent d'une table basse pour poser le matériel. L'activité prend entre cinq à dix minutes selon les élèves.
L'activité se décompose en trois étapes, avec trois consignes successives :
1°/ Mets 24 allumettes dans la boite. Tu peux les ranger, faire des tas... si ça t'aide à les compter sans te tromper.

2°/ Peux-tu ranger les allumettes autrement pour qu'on puisse voir 24 d'un seul coup d’œil, très rapidement ?

3°/ Écris 24 (sur un papier). Peux-tu me montrer « le 4 » de 24 dans ton tas d'allumettes ? Peux-tu me montrer « le 2 » de 24 dans ton tas d'allumettes ?

L'activité est proposée à 10 élèves de CP choisis au hasard dans la classe.

Tableau 6 : Repérage des 2 dizaines dans 24 par les CP.

CP	Consigne 1	Consigne 2	Consigne 3
Flavie	Compte de 1 en 1 sans rangement.	Fait 2 lignes de 10 et une troisième de 4 allumettes. « J'ai fait 2 paquets de 10 pour bien voir qu'il y a 20 et 4 en dessous »	Elle écrit 24. Montre le 4 dans la troisième ligne puis le 2 dans le 4.
Perrine	Compte de 1 en 1 sans rangement.	Fait une ligne de 11 puis une de 12 puis une troisième contenant 1 allumette. (Elle ne peut pas expliquer le choix de ce rangement)	Elle écrit 24. Elle ne parvient pas à montrer le 4. Elle semble ne pas comprendre la question.
Jade	Compte de 1 en 1 en les rangeant en quinconce (« pour faire joli »). Elle bloque me demande ce qui vient après 12 (le comptine numérique n'est pas stable et elle a besoin de s'appuyer sur la file numérique dans la classe).	Elle place toutes les allumettes bien serrées sur une seule ligne. (Elle explique le choix de ce rangement par « c'est mieux comme ça »).	Elle écrit 24. Elle sépare les 4 dernières allumettes de la ligne pour montrer le 4. Elle montre 2 dans 4.
Cyprien	Compte de 1 en 1 en rangeant les allumettes tout autour de la boîte. Une fois le tour « remplis », il met le reste au milieu, en tas.	Il fait une ligne de 20 allumettes et une autre de 4 en dessous.	Il écrit 24. Il montre le 4 avec la deuxième ligne puis le 2 dans le 4.
Nathan	Compte de 1 en 1 sans rangement spontané. Il recompte une deuxième fois pour vérifier s'il n'y a pas d'erreur.	Il fait trois tas, deux tas de 10 sur une même ligne, éloignés l'un de l'autre et un petit tas de 4 en dessous. Il recompte ses groupes de 10 pour être sûr. « Là, y a 1 paquet de 10,	Il écrit 24. Il montre le 4. Il montre d'abord le 2 dans le 4 puis réfléchit et me demande « C'est le 2 de 24 ? ». Je réponds oui et il montre les deux tas de 10 avec une demande

		1 autre paquet de 10 pour faire 20, et là il y a 4 »	d'approbation. Je lui demande s'il est sûr de lui. Il répond non.
Assya	Compte de 1 en 1 en rangeant directement les allumettes horizontalement par 3. Elle obtient 8 lignes de 3 allumettes.	Elle change l'orientation des allumettes et les place verticalement en lignes de 6. Elle obtient 4 lignes de 6 allumettes. (Elle ne sait pas expliquer pourquoi c'est plus facile de voir 24 comme ça)	Elle écrit 24. Pour montrer 4, elle pousse toutes allumettes dans un coin de la boîte sauf 4. Pour le 2, elle en pousse encore 2.
Arthur	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 mais construit spontanément deux lignes de 10 et une troisième ligne de 4 allumettes en dessous.	Il m'explique « Tu peux voir 24 parce que ça c'est deux groupes de 10 et là y'a 4 » en montrant successivement les trois lignes.	Il écrit 24, Contre toute attente, il montre la 4ème allumette de la première ligne puis la deuxième allumette.
Eric	Compte de 1 en 1, de 1 à 24, sans rangement.	Il range les allumettes en deux colonnes de 10 et 4 allumettes à côté, à droite. Il explique « 10 + 10 = 20 et 4, 24 »	Il écrit 24, Il montre les 4 allumettes à droite pour désigner « le 4 » de 24 puis les deux colonnes pour désigner « le 2 » en ajoutant « c'est comme deux boîtes de 10 ».
Adeline	Compte de 1 en 1, de 1 à 24, mais fait spontanément des groupes de 5.	A la demande d'un autre rangement elle trouve que « comme ça c'est bien » et ajoute « là, y'a 5 et 5, ça fait 10, 10 et 10 ça fait 20, et 4 ça fait 24 ».	Elle écrit 24, Elle montre les 4 à part pour désigner « le 4 » puis les deux paquets de 10 pour désigner « le 2 ».
Ethan	Compte de 1 en 1, de 1 à 24, sans rangement.	Fait un paquet, hésite... puis se reprend et fait une longue ligne d'allumettes verticales.	Il écrit 24, Il montre la 4ème allumette pour « le 4 » et la 2ème pour « le 2 » de 24.

Cette activité permet bien de repérer les stratégies utilisées par les élèves en même temps que la réussite ou non de l'épreuve. Ainsi, dans l'échantillon test de 10 CP, on peut constater que 3 élèves parviennent à associer le « 2 » de 24 à deux dizaines et que la plupart des élèves procèdent par tâtonnement, sans organisation spontanée des dizaines lors de la première consigne.

Plusieurs stratégies se répètent. En conséquence, il pourrait être intéressant de prévoir une grille d'observation armée pour faciliter la collecte des données. Certains enfants, par exemple, confondent le cardinal et l'ordinal en montrant la quatrième puis la deuxième allumette qu'ils ont rangé. D'autres procèdent à une organisation des allumettes par groupes de 10 (après la deuxième consigne) mais ne parviennent pas à faire de liens pour parvenir à la réponse finale attendue.

Dans l'épreuve de Kamii, seule la réussite est prise en compte. Notre étude doit-elle se ranger à cette seule observation ? C'est une question que nous serons amené à nous poser... en anticipant sur les stratégies possibles et observables utilisées par les élèves avec un dessin.

Cette épreuve est très intéressante pour observer les stratégies utilisées par les enfants et interroge par rapport aux différences entre les organisations spatiales et les raisonnements mathématiques qui en découlent. Ainsi, plusieurs élèves rangent « correctement » les allumettes en deux paquets de 10 et 4 unités isolées mais ne parviennent pour autant à associer le « 2 » de 24 à deux dizaines. Doit-on en conclure qu'ils ne maîtrisent pas la numération décimale positionnelle ? Comment vérifier si ce raisonnement est identique avec un dessin ?

Tableau 7 : Repérage des 2 dizaines dans 24 par les CE1 (groupe A)			
CE1 (A)	Consigne 1	Consigne 2	Consigne 3
Max	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 sans rangement.	Fais deux tas de 10 allumettes bien serrées et place 4 allumettes en dessous.	Il écrit 24. Montre le 4 en dessous et pour le 2, montre deux allumettes dans la seconde série de 10.
Elisa	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 sans rangement.	Fait 3 lignes de 8 allumettes.	Elle écrit 24. Le 4 correspond aux quatre premières allumettes de la première ligne. Le 2 correspond aux deux premières allumettes de la deuxième ligne.
Théo	Compte 1 groupe de 10, le met de côté. Compte un autre groupe de 10 (en repartant de zéro), le met de côté. Compte encore 4 allumettes.	Montre et explique « Là, j'ai un groupe de 10, là j'ai un autre groupe de 10, ça fait 20, plus 4, ça fait 24 ».	Demande s'il doit écrire le nombre en lettres ou en chiffres. Ecrit 24. Le 4 est ici (le montre). Le 2 c'est là (montre les deux groupes de 10 et ajoute « le groupe de 10 et l'autre groupe de 10 »).
Elie	Compte de 1 en 1, de 1 à	Fait des groupes de 5.	Il écrit 24,

	24 sans rangement. Recompte pour vérifier.	Explique « 5 et 5 ça fait 10, 10 et 10 ça fait 20, et 4 ça fait 24 ».	Montre le 4. Montre le 2 (les 4 tas de 5). Je demande « Je vois 4 tas pourquoi tu me dis 2 ? » Réponse « Oui mais là, c'est 5 et 5 et ça fait 10 (il les serre). Tu vois, c'est deux dizaines! »
Sélène	Fait un tas de 10 qu'elle met sur le côté. Un autre tas de 10 puis 4 en dessous.	Elle range un peu mieux les tas de 10 pour qu'aucune allumettes ne se chevauche.	Elle écrit 24. Elle prend les 4 allumettes dans ses mains pour me montrer le 4. Elle prend les 2 tas de 10 dans ses mains (un tas dans chaque main) pour me montrer le 2.
Emilie	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 sans rangement.	Elle sépare mieux chaque allumettes mais sans rangement précis. Elle met juste un peu à part... Je lui demande si elle voit facilement les 20 allumettes. Elle change et fait des petits tas de 3 ou 4 allumettes sous formes d'échelles irrégulières (cf photo ...)	Elle écrit 24, Elle montre le 4. Elle montre 2 allumettes dans son rangement de 20.

Tableau 8 : Repérage des 2 dizaines dans 24 par les CE1 (groupe B)			
CE1 (B)	Consigne 1	Consigne 2	Consigne 3
Rémi	Compte de 1 en 1, de 1 à 24, en faisant d'abord une ligne de 10 puis une ligne de 7 et une troisième ligne de 7.	Il refait deux tas de 10 (sans conserver le premier) en repartant du bas de la boîte. Il obtient ainsi dans le sens de la lecture une ligne de 4 puis deux lignes de 10.	Il écrit 24. Il montre 4 sur la première ligne. Il montre le 2 en pointant deux allumettes à droite de la deuxième ligne.
Marine	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 sans rangement.	Elle fait deux tas de 10 (allumettes serrées) et met 4 allumettes à côté.	Elle écrit 24, Le 4 est bien présenté à côté. Pour le 2 elle montre les deux tas. Je demande « C'est ça, c'est 2 ? ». Elle me répond « Oui, c'est deux dizaines. »
Rose	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 sans rangement.	Elle fait 6 tas de 4 allumettes sur une ligne.	Elle écrit 24. Elle montre la quatrième allumette pour le 4.

			Elle montre la deuxième allumette pour le 2.
Emma	Elle prend des petits tas qu'elle pose sur la plateau avant de les compter. Elle poursuit ainsi la comptine numérique (mais se trompe en ne posant finalement que 23 allumettes au lieu de 24).	Elle range les allumettes en 7 lignes de 3 et une 8ième ligne de 2.	Elle écrit 24. Elle montre la quatrième allumette de la première ligne pour le 4. Elle montre la deuxième allumette de la première ligne pour le 2.
Jules	Compte de 1 en 1, de 1 à 24 sans rangement.	Il fait deux lignes de 10 allumettes et une troisième ligne de 4.	Il écrit 24. Il montre les 4 allumettes de la dernière ligne pour désigner le 4. Il montre 2 allumettes à l'intérieur des 4 pour désigner le 2.
Raphaëlle	Elle fait spontanément deux groupes de 10 et un groupe de 4.	Elle replace ses groupes de 10 sur deux lignes et les 4 allumettes supplémentaires sur une troisième ligne.	Elle écrit 24. Elle montre les 4 allumettes de la dernière ligne pour désigner le 4. Elle montre les deux lignes de 10 pour désigner le 2 et précise « c'est deux dizaines ».

Les élèves de CE1 appartiennent à deux classes différentes que nous avons noté A et B. Dans la classe A, l'enseignante utilise une méthode très ancrée sur les compétences visuo-spatiales et l'appropriation de collections-témoins. L'utilisation de matériel concret est également laissée à la disposition des élèves (jetons et boîtes de 10 pour les ranger (matériel « Picbille » de Brissiaud et matériel « base 10 » : cube de 1, barre de 10 et plaques de 100). Dans la classe B, les élèves n'utilisent pas de matériel et travaillent à partir de fiches ou directement sur leur cahier. C'est une variable que nous n'avions pas envisagée au départ mais qui, puisqu'elle se présente, mérite que l'on s'y intéresse.

Nous constatons trois réussites sur six dans le groupe A et deux réussites sur 6 dans le groupe B. Par ailleurs, dans le groupe A, les rangements sont plus organisés que dans le groupe B. On retrouve davantage de groupes de 5 ou 10, parfois même de façon spontanée, dès la première consigne (pour deux élèves) du groupe A. Ainsi, il semble que l'utilisation de matériel concret en classe modifie quelque peu, dans cette activité, la façon d'organiser les rangements.

En CE1, certains élèves vérifient leurs calculs, ce qui n'était pas le cas en CP. Parfois, ils organisent un rangement spontané des allumettes dès la première consigne. De façon générale, on constate une plus grande rigueur et davantage de volonté à obtenir une organisation idéale correspondant à une logique précise.

En admettant que ces stratégies soient davantage repérées avec l'utilisation de matériel qu'avec l'utilisation d'un dessin, cela suffirait-il à en déduire que l'un est plus efficace que l'autre pour accéder au nombre ? On pourrait simplement en déduire que dans le cadre de cette activité, le matériel (ou le dessin) est plus efficace pour observer les stratégies opératoires utilisées par les élèves.

Pour faire un lien avec notre hypothèse il conviendrait alors d'admettre que des stratégies plus variées sont la preuve d'une plus grande efficacité cognitive, ce qui reste à démontrer.

Nous arrivons ainsi à un point essentiel de notre protocole de recherche : la cohérence entre l'hypothèse formulée et les moyens de la vérifier. Ce sont les résultats escomptés et leurs limites qui nous aideront à clarifier notre méthodologie.

c) Synthèse et ajustements

- Concernant cette activité, elle a pour but de confirmer, infirmer ou nuancer une hypothèse plus complexe puisqu'elle contient deux variables : l'appropriation du nombre et la numération décimale positionnelle. Cet élargissement de l'hypothèse est liée au fait que les enfants sont plus âgés et que les attentes en matière de connaissance du nombre sont plus importantes que pour des MS-GS. Une bonne compréhension de la numération décimale positionnelle nous semble être un bon indice de l'appropriation du nombre et c'est en ce sens que nous pouvons considérer que ces variables sont liées.
- Le fait de tenir compte du matériel utilisé en classe par les enseignants peut-être pertinent. Il nécessiterait un entretien semi-directif préalable pour repérer le type de matériel utilisé, de quelle manière et avec quelle fréquence.

➢ Une grille d'observation armée permettrait de relever par ailleurs, au niveau de l'épreuve, la fréquence des stratégies régulières que nous avons déjà pu repérer, et au besoin les compléter, à savoir :

. Organisation spontanée des allumettes
. Organisation spatiale 2 dizaines et 4 unités séparées
. Organisation multiplicative (4 x 6)
. Autre organisation
. Utilisation du mot dizaine (ou groupe de 10 ou boîte de 10)
. Capacité à relier le « 2 » de 24 aux deux dizaines et le « 4 » aux quatre unités
. Confusion cardinal-ordinal (quatrième et deuxième allumettes)

4.6. Synthèse des épreuves tests.

Grâce à ces épreuves tests nous avons pu préciser encore notre hypothèse qui se traduit par : « Il est plus facile pour les enfants de s'approprier le nombre avec du matériel concret que par le dessin. »
Les résultats escomptés sont différents selon les âges des enfants. Pour les plus jeunes, MS-GS, nous prendrons en compte plusieurs variables :

- ✔ La discrimination visuelle d'une constellation de moins de 10 points présentée deux secondes, deux fois de suite,
- ✔ La capacité à associer un mot-nombre inférieur à 10 à sa représentation cardinale,
- ✔ La capacité à se corriger (entre les deux présentations de points par exemple),
- ✔ La capacité à donner une réponse orale du résultat obtenu.
- ✔ La préférence exprimée par les enfants sur l'un ou l'autre outil (matériel ou dessin) en partant du principe que l'outil préféré est susceptible de réduire l'anxiété que l'enfant peut ressentir face à l'activité proposée.

Pour les CP-CE1, les résultats escomptés et les variables seront différents :

- ✔ La capacité à distinguer les dizaines des unités dans un nombre supérieur à 10,

- ✔ La capacité à organiser le matériel ou entourer les points (avec un dessin) de façon à distinguer dizaine(s) et unité(s) isolée(s),
- ✔ La capacité à varier ses stratégies ou se corriger en cas de doute,
- ✔ La préférence exprimée pour l'un ou l'autre outil.

Nous conserverons les deux épreuves avec les modifications précisées, particulièrement les observations armées, afin de garantir une plus grande fiabilité à l'étude. En effet, dans les épreuves tests effectuées nous avons pu constater des disparités entre les MS et les GS par exemple. Les seconds semblant moins à l'aise que les premiers avec le dessin qu'avec le matériel. Cela est-il lié à l'âge ou à l'entraînement ? Ce rapport moins aisé au dessin se vérifiera-t-il en CP-CE1 ? L'utilisation de matériel dans la classe, en CP ou CE1, peut également être considéré comme un entraînement à l'activité. Cet entraînement peut-il faire varier les résultats ?

Conclusion.

Les trois premières parties de ce dossier nous ont permis d'approfondir nos connaissances dans le domaine de l'acquisition du nombre et de faire évoluer notre questionnement. Nous avons d'abord cherché à savoir pourquoi les théories piagétiennes sur la genèse du nombre étaient remises en question et pourquoi le matériel concret, si présent des années 40 à 80 environ était aujourd'hui très peu utilisé. Au fil de nos lectures, nous avons découvert que les choses étaient bien loin d'être aussi radicales, même dans l'idée que nous nous en faisions. En effet, nous n'avons pas trouvé d'études précises sur l'évolution de l'utilisation du matériel concret et ce que nous pensions être une remise en question massive de la pensée piagétienne était tout au plus une évolution, liée entre autre, à celles de la neuropsychologie et des techniques d'imagerie cérébrale. La recherche scientifique s'enrichissait de remises en question permanente de ses analyses et de ses réflexions, elle était sans cesse en mouvement.
Nous avons alors cherché à savoir quels étaient les principaux obstacles à l'acquisition du nombre admis par la recherche actuelle. Nous en avons repéré six

qui, sans faire l'unanimité, semblaient suffisamment au cœur des débats pour mériter que l'on s'y intéresse. Notre difficulté a consisté alors à lier notre hypothèse de recherche à ce corpus de données. S'interroger sur l'intérêt du matériel concret de façon globale était trop vague et nous devions préciser notre question afin de construire une méthode d'investigation pertinente. Les recherches de Constance Kamii, l'utilisation courante du dessin en mathématiques ont aiguisé notre curiosité. Notre hypothèse s'est imposée d'elle-même : « Il est plus facile pour les enfants de s'approprier le nombre avec du matériel concret que par la réalisation d'un dessin. » Il ne restait plus qu'à trouver un moyen de la vérifier.

Plus difficile à faire qu'à dire... et cette hypothèse prenait-elle en compte les obstacles à l'acquisition du nombre que nous avions évoqués ? Devait-elle les prendre en compte ? Le doute et la remise en question permanente de notre méthodologie sont devenus notre quotidien. Nous ne sommes pas parvenus à définir une activité susceptible de vérifier cette hypothèse et avons décidé de procéder à deux épreuves tests. Celles-ci nous ont permis de faire des choix que nous apprécierions d'approfondir en Master 2.

Nous sommes conscients d'avoir encore beaucoup à apprendre et ce travail reste perfectible. Il n'en reste pas moins que nous avons à présent une idée plus précise de la recherche scientifique et de ses nombreuses exigences. Les questionnements restent importants. Oserions-nous dire de plus en plus importants ? Si, comme nous le pensons, la recherche est un processus cumulatif, il n'y a rien d'étonnant à ce que notre résultat semble partiel. Toutefois, nous avons conscience d'avoir acquis une logique particulière, celle de la démonstration, l'argumentation basée sur des faits, l'interprétation toujours discutable, la perpétuelle remise en question de notre raisonnement, la nécessité d'échanger avec ses pairs et la certitude d'avoir toujours à apprendre.

En cela, ce dossier exploratoire de recherche aura été d'un grand enrichissement.

Bibliographie

BACQUET M., GUERITTE-HESS B., (1990). « *Le nombre et la numération. Pratique de rééducation.* », ISOCEL, Brive, Ed du Papyrus.

BARTH B-M., (1987) « *L'apprentissage de l'abstraction. Méthodes pour une meilleure réussite de l'école »*, Paris, Editions Retz.

BRISSIAUD R., (1989, nouvelle édition 2003). « *Comment les enfants apprennent à calculer* », Paris, Retz .

CHALON-BLANC A. (2005). « *Inventer, compter et classer. De Piaget aux débats actuels.* », Paris, Armand Colin.

DEHAENE S., (1997). « *La bosse des Maths* », chap. III, Notre héritage numérique, Paris, Odile Jacob.

DOLLE J-M., (1974). « *Pour comprendre Jean Piaget* », Toulouse, Privat.

FAYOL M., (1990). « *L'enfant et le nombre* », Neuchâtel-Paris, Delachaux-Niestlé.

FAYOL M., (2012). « *L'acquisition du nombre* », Paris, Que sais-je, PUF.

FUSON K.C., (1991). « *Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans.* » In J.Bideaud, C.Meljac & J.P Fischer (Eds), « *Les chemins du nombre* » (pp.159-179). Lille, Presses universitaires.

GRÉCO P., (1962). « *Quantité et quotité, études d'épistémologie génétique* », Paris, PUF.

HOUDÉ O., (1995). « *Rationalité, développement et inhibition* », Paris, P.U.F.

HOUDÉ O., (2004). « *La psychologie de l'enfant* », Paris, Que sais-je, P.U.F.

JAULIN-MANNONI F., (1973). « *Pédagogie des structures logiques élémentaires* », Paris, Editions Sociales Françaises.

KAMII C. (1994). « Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique. », Peter Lang.

MELJAC C., (1979). « *Décrire, agir, compter. L'enfant et le dénombrement spontané* », Paris, PUF.

PIAGET J. & INHELDER B., (1959). « *La genèse des structures logiques élémentaires ; classifications et sériations* », Neuchâtel-Paris, Delachaux-Niestlé.

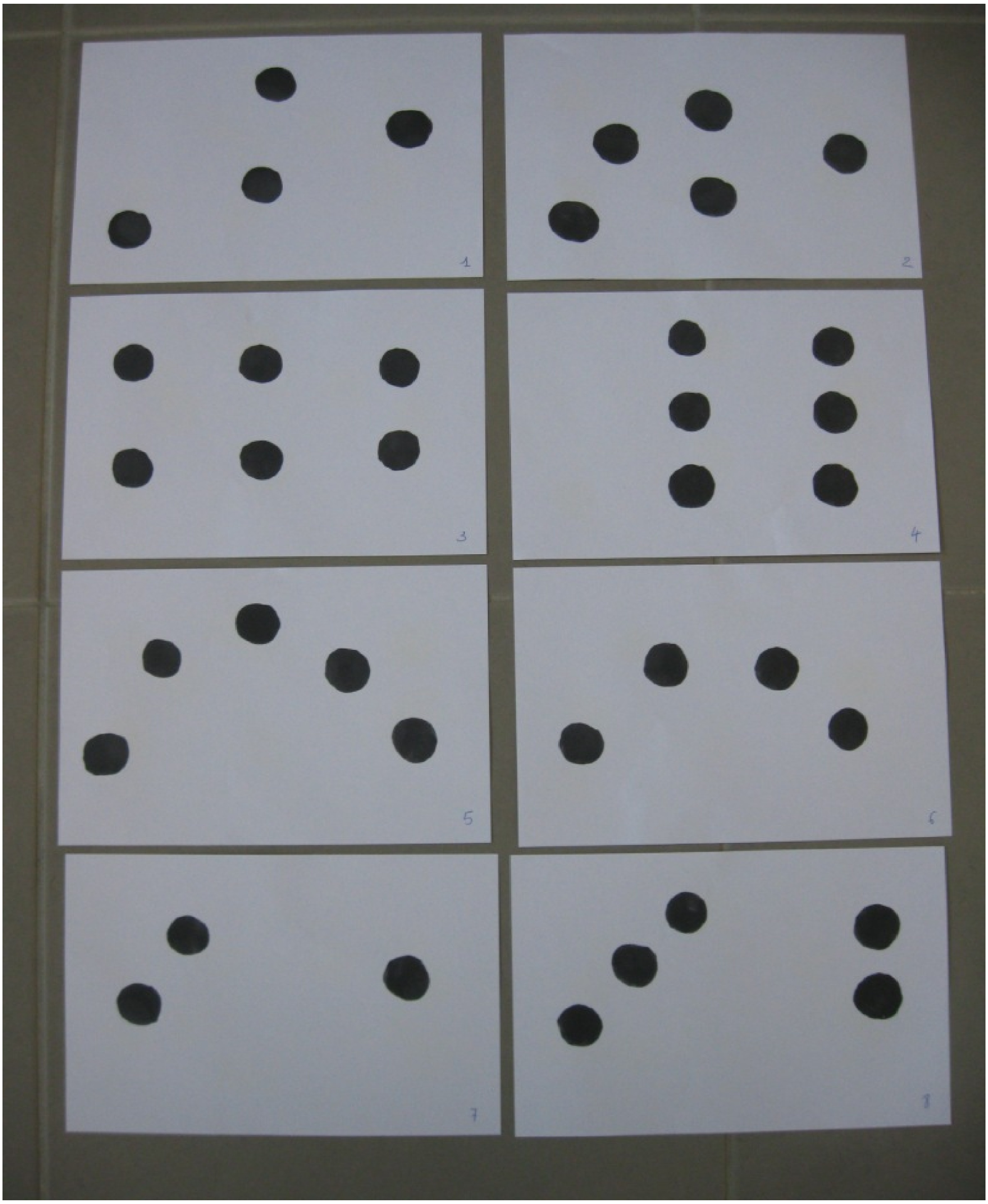
PIAGET J., & SZEMINSKA A., (1941). « *La genèse du nombre chez l'enfant* », Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, chap. I et II.

VERGNAUD G., (1981). « *L'enfant, la mathématique et la réalité.* » Berne, Peter Lang.

VILETTE B., (1996). « *Le développement de la quantification chez l'enfant : comparer, transformer et conserver.* » Villeneuve d'Asq, Presses Universitaires du Septentrion.

ANNEXE 1

Première expérimentation MS-GS : les constellations de points.



Images rangées de la façon suivante : 1 – 2

3 – 4

5 – 6

7 – 8

ANNEXE 2

Deuxième expérimentation CP-CE1 : les organisations d'allumettes.

image 1

image 2

image 3

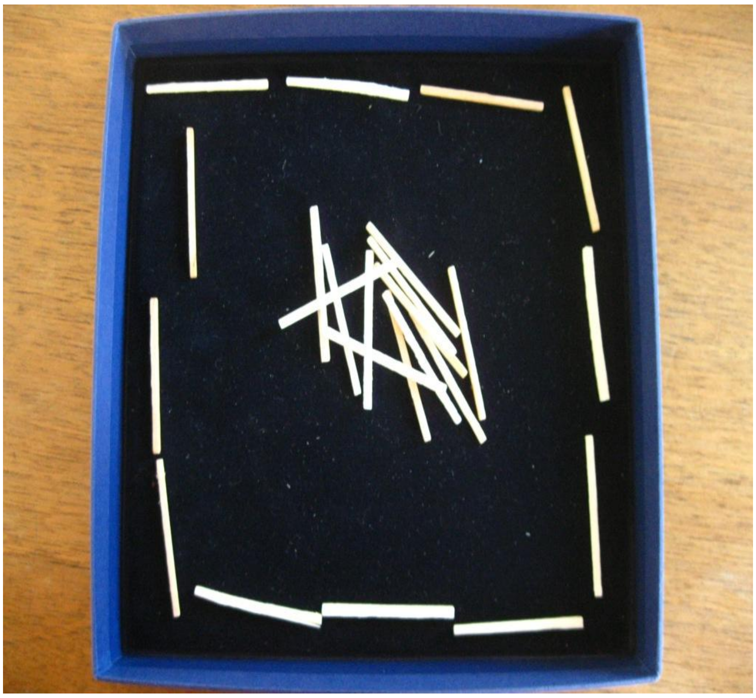


image 4